

N° d'Ordre : 3841

THÈSE

Présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

pour obtenir

le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention Mathématiques et Applications

par

Richard LEROY

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

Ecole Doctorale MATISSE

UFR de Mathématiques

TITRE DE LA THÈSE :

**CERTIFICATS DE POSITIVITÉ ET MINIMISATION POLYNOMIALE DANS LA
BASE DE BERNSTEIN MULTIVARIÉE**

Soutenue le vendredi 5 décembre 2008 devant la commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY :

M. Jean-Bernard LASSERRE	Rapporteur
M. Bernard MOURRAIN	Examineur
M. Dmitrii PASECHNIK	Examineur
Mme Marie-Françoise ROY	Directrice de Travaux
M. Markus SCHWEIGHOFER	Examineur



Remerciements

« Dans la vie, les hommes sont tributaires les uns des autres.
Il y a donc toujours quelqu'un à maudire ou à remercier. »

Madeleine Ferron
Le Chemin des dames

« Merci »

J'adresse bien évidemment mes remerciements en premier lieu à Marie-Françoise Roy, directrice de thèse tour à tour motivante, compatissante et compréhensive. Elle a su, dans son soutien et sa retenue, alléger le poids des mes premières années de thèse rendues difficiles par tout autre chose que les mathématiques. Elle m'a également initié aux joies de l'approche algorithmique de la géométrie algébrique réelle. Mon envie de poursuivre des études doctorales remonte d'ailleurs à son cours de maîtrise en algorithmique et complexité, qu'elle assurait alors avec Jean-Claude Raoult. L'année d'agrégation et un séminaire de DEA encadré par Michel Coste sur le théorème de Schmüdgen m'ont finalement conforté dans cette voie. C'est également lors de ces années prédoctorales que j'ai découvert l'efficacité et la gentillesse de l'ensemble du personnel de l'IRMAR, que je remercie vivement. J'ai découvert plus tard un accueil tout aussi chaleureux à l'ENS, auprès de Michel Pierre et de Greg en particulier.

« Merci (and thank you) »

Je tiens bien évidemment à remercier Jean-Bernard Lasserre et Bruce Reznick d'avoir accepté la lourde tâche de rapporteurs : la relecture d'une thèse est un travail fastidieux. Une mention spéciale doit être décernée à Bruce, qui a su dépasser la barrière linguistique. Je salue également la disponibilité des autres membres composant mon jury. Que ce soit lors d'exposés ou de conversations informelles, j'ai beaucoup appris de Bernard Mourrain, Dima Pasechnik et Markus Schweighofer.

« Danke schön »

Ma deuxième année de thèse a été l'occasion d'un formidable séjour de six mois à l'université de Konstanz. Je garde un souvenir ému des gens que j'y ai rencontrés. Je dois beaucoup à Claus Scheiderer, responsable bienveillant, et à Markus Schweighofer, collègue et ami toujours présent. Mon séjour n'aurait pas eu la même saveur sans Katrin et Ruben, francophones francophiles, qui ont partagé les meilleurs (et les pires !) moments de cette escale germanique. Anna et Louise, sourire et accent irlandais aux lèvres, ont éclairé mes lundis soirs. Les parties de pétanque et les quiz hebdomadaires me reviennent souvent en mémoire, et sont l'occasion de me souvenir d'agréables moments passés avec Daniel, Johannes, Tim, Chevi et tant d'autres. Une pensée spéciale pour Annika me semble indispensable.

« Trugarez »

Je dois bien avouer que, malgré mes origines normandes, cette décennie (!) passée à Rennes restera marquée par les nombreuses amitiés nouées avec des bretons, d'origine ou d'adoption. Clémence est certainement ma plus ancienne amie sur Rennes, et j'espère continuer à la revoir régulièrement. Cela impliquera sans nul doute de passer à nouveau de bons moments avec Vincent et Benoît. Mon arrivée à l'IRMAR a d'abord été marquée par l'accueil chaleureux de mes cobureaux, Guéno, Solène et Magali, et l'ambiance champêtre du foot hebdomadaire dans l'herbe, la boue, les cailloux ou la neige. Les nombreux habitués de nos joviales parties ne m'en voudront pas de ne pas tous les citer... Je me dois quand même de saluer le fameux "clan Chatel" ! Merci donc à Kaelig, Gweltaz, Delphine, Pierre, Greg, Guillaume, Hélori, Maël, Cyril et aux autres de m'avoir initié au squash, au foot, au ping-pong et aux jeux de société à base de chafouineries. J'appartiens

également à ce que certains appellent, me rappelant ainsi mes années collège, le groupe des intellos. Mes innombrables parties de tarot et de belote teutonnes sont effectivement autant de preuves d'élitisme ainsi que d'une supériorité intellectuelle partagée avec JR, Viktoria, Mikaël, Yann, Mathilde, Sébastien, Clément, Aurélien, Lionel, Sabine, Davide, Anne-Claire, Pierre, Arnaud et autres intermittents que j'aime à retrouver en séminaire journalier, sur un court de tennis, devant un match de foot ou de rugby, une bière belge à la main, ou en toute autre occasion. Je tiens également à remercier ceux pour qui la citation du début prend tout son sens, et qui me poussent à mettre en pratique mes convictions religieuses au quotidien.

« Cimer »

« Que serais-je sans toi, que ce balbutiement ? » disait le philosophe. Je ne peux trouver mieux pour décrire ce que je vous dois, amis Finfins. Cela fait maintenant jusqu'à 26 ans que nos amitiés se sont nouées. Merci donc d'être encore là, de m'avoir parfois subi, souvent supporté et toujours soutenu. De l'apprentissage de l'alphabet à Attacama en passant par les envois au coin, des tournois de foot en salle à la salle des fêtes de St Pierre, des mousquetons à la 306 Touch, du Standard au Scottish, du paintball à bout portant aux circuits de karting, de nos premières amours aux premiers bébés finfins, vous avez toujours été dans mon coeur. "Quelle beauté pour l'oeuille que de vous voire" !

Sans pour autant faire partie des Finfins, c'est ici que je tiens à saluer Françoise. Des moments difficiles n'ont pas empêché le plaisir des retrouvailles.

Plus importante encore a été la place d'Orianne. Si la vie se mesure à l'amplitude de ses hauts et ses bas, je lui dois de m'être senti bien vivant. Je me réjouis qu'après quelques années, l'amitié nous unisse toujours aussi fortement.

Merci à Armelle et Marion, fidèles meilleures voisines, compagnes de boisson, de Mac Do, de Pop Corn mais surtout de confessions intimes lors de dîners presque parfaits.

« Merci (encore et toujours) »

Evidemment, je ne serais pas là aujourd'hui sans le soutien de ma famille. Sans forcément tout comprendre des études doctorales, et plus généralement des mathématiques, ils m'ont toujours entouré. Quelques lignes ne suffisent pas à leur témoigner mon amour et ma reconnaissance. C'est avec grand plaisir que je vois

ma famille s'agrandir, et que je mesure ma chance d'en faire partie.

« Merci (tout doux) »

Finalement, des mots ne peuvent pas retranscrire le bonheur que je ressens à tes côtés... Merci d'être là, de me voir comme tu le fais, d'illuminer chaque nouvelle journée, de me comprendre et me sourire, de transformer chacun de nos réveils en autant de petits bonheurs, de supporter tous mes défauts, y compris ceux insupportables! Merci de me rendre simplement heureux...

Table des matières

1	Polynômes de Bernstein	19
1.1	Simplexes et coordonnées barycentriques	19
1.2	Base de Bernstein	21
1.3	Propriétés de la base de Bernstein	24
1.4	Algorithme de De Calsteljau	25
1.5	Subdivision	27
1.6	Elévation du degré	31
1.7	Dérivées	32
1.7.1	Dérivées barycentriques	32
1.7.2	Dérivées directionnelles	33
2	Triangulation standard et polytope de contrôle	35
2.1	Grille de contrôle	35
2.1.1	Le cas univarié	35
2.1.2	Le cas multivarié	36
2.2	Triangulation	36
2.3	Triangulation de Kuhn	37
2.4	Triangulation standard	40
2.4.1	Exemple fondamental	41
2.4.2	Cas général	43
2.5	Quelques propriétés de la triangulation standard	44
2.5.1	Restriction aux faces	44
2.5.2	Sous-triangulations	44
2.5.3	Adjacences	46
2.5.4	Calcul de la grille de contrôle de la triangulation standard de degré 2	47
2.6	Polytope de contrôle	49
2.7	Convexité	49
2.7.1	Polytope de contrôle	49
2.7.2	Polytope de contrôle composé	55

3	Grille de contrôle : approximation et convergence	57
3.1	Approximation par la grille de contrôle	57
3.1.1	Le cas univarié	57
3.1.2	Approximation par la grille de contrôle	58
3.2	Convergence de la grille de contrôle vers le graphe de f sur la grille de Gréville	62
3.2.1	Convergence par élévation du degré	62
3.2.2	Convergence par subdivision	64
4	Borne sur le minimum d'un polynôme strictement positif	69
4.1	Représentation univariée rationnelle	69
4.2	Borne sur le minimum	70
5	Certificats de positivité	81
5.1	Certificats de positivité	81
5.2	Certificats de positivité et élévation du degré	81
5.3	Certificats de positivité et subdivision	84
5.4	Algorithme pour le calcul de certificats de positivité	85
6	Minimisation polynomiale	95
6.1	Encadrement du minimum	95
6.2	Algorithme de minimisation	96
6.3	Variantes de l'algorithme	100
6.3.1	Encadrement du minimum avec localisation d'un seul minimiseur	100
6.3.2	Subdivision à l'aide de l'algorithme de De Casteljou aux points de la grille de Gréville	104
6.3.3	Subdivision à l'aide de l'algorithme de De Casteljou sur une arête	106
6.4	Notes bibliographiques	107
7	Perspectives	111



Liste des algorithmes

1	Algorithme de De Casteljau : évaluation	25
2	Algorithme de De Casteljau : subdivision en un point intérieur	27
3	Algorithme de De Casteljau : subdivision en un point situé sur une arête	30
4	Bounded Algebraic Sampling	70
5	Certificat de positivité local	86
6	Minimisation sur le simplexe standard (tous les minimiseurs)	97
7	Minimisation sur le simplexe standard (un seul minimiseur)	101



Notations

\mathbb{R} désigne le corps de nombres réels.

Si k est un entier supérieur à 1, on note $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ l'anneau des polynômes réels en k variables.

Pour un multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^{k+1}$, on note $|\alpha|$ la somme de ses coordonnées.

Quand la dimension des multi-indices sera claire, on allègera l'écriture

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^{k+1}, |\alpha| = d$$

en notant simplement

$$\forall |\alpha| = d.$$

On note également $S_k(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles symétriques carrées d'ordre k .

On notera tout au long de ce travail Δ_k (ou simplement Δ quand la dimension est claire) le simplexe standard de \mathbb{R}^k , défini par :

$$\Delta_k := \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid \forall i, x_i \geq 0 \text{ et } \sum x_i = 1\}.$$



Introduction

Les objets étudiés dans cette thèse sont les polynômes réels en plusieurs variables. Depuis la fin du 19^{ème} siècle, le problème de prouver leur éventuelle positivité est étudié. Il s'agit d'un problème difficile. Des critères assurant cette positivité sont alors utiles. Par exemple, une somme de carrés de polynômes réels en k variables ($k \geq 1$) est positive sur \mathbb{R}^k . Le 17^{ème} problème de Hilbert pose la question de la réciproque. Celle-ci est fautive, puisqu'en général, on peut seulement dire qu'un polynôme positif sur \mathbb{R}^k est une somme de carrés de fractions rationnelles.

D'autres critères existent, assurant la positivité d'un polynôme f sur un sous-ensemble de \mathbb{R}^k . Par exemple, si f a tous ses coefficients positifs, alors f est positif sur $(\mathbb{R}^+)^k$. La réciproque est évidemment encore fautive en général.

Ces critères sont simples : il s'agit d'une identité algébrique rendant évident le fait que f soit positif. On parle alors de certificat de positivité.

Le premier objectif de cette thèse est d'étudier la positivité d'un polynôme f sur un simplexe de \mathbb{R}^k . Pour cela, on utilisera une base de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ plus adaptée que la base des monômes pour ce problème : la base de Bernstein. De la même manière que précédemment, si les coefficients de f dans cette base sont positifs, alors f est positif sur le simplexe considéré. La réciproque est encore fautive, mais en subdivisant le simplexe ou en élevant le degré de f (ie en le considérant comme un polynôme de plus haut degré), on obtient un certificat de positivité pour f dans le cas où il est positif. On obtient même mieux, puisque dans le cas où f n'est pas positif, on dispose d'un algorithme certifiant cette non-positivité.

Dans un deuxième temps, on étudie le problème de minimisation d'un polynôme f sur un simplexe de \mathbb{R}^k . Là encore, la base de Bernstein fournit les outils utiles pour l'étude de ce problème. On obtient alors des algorithmes certifiés résolvant ce problème de minimisation.

Ce travail est présenté comme suit. Dans les deux premiers chapitres, on introduit les polynômes de Bernstein et la notion de triangulation standard. On rappelle leur construction et leurs propriétés utiles à la suite de l'exposé.

Les polynômes de Bernstein forment une base, et les coefficients d'un polynôme f dans cette base contiennent beaucoup d'informations sur la géométrie de f . En particulier, ils sont proches des valeurs de f , dans le sens donné par les résultats du chapitre 3. Les techniques d'élévation et de subdivision sont également standard en ce qui concerne les polynômes de Bernstein. Le chapitre 3 donne également des résultats de convergence explicites des coefficients de Bernstein : en élevant suffisamment le degré de f ou en subdivisant suffisamment le simplexe de départ, les coefficients de Bernstein convergent vers des valeurs de f . Cette dernière propriété est à la base des algorithmes de certificats de positivité et de minimisation présentés dans les chapitres 5 et 6. Le chapitre 5 utilise également un résultat nouveau, présenté dans le chapitre 4, donnant une borne inférieure sur le minimum d'un polynôme f sur le simplexe standard en fonction de son degré et de la taille de ses coefficients.

Tous les algorithmes utilisés dans la présente thèse ont été programmés sur ordinateur, constituant ainsi une bibliothèque utilisable par les utilisateurs de Maple et de Maxima.

Polynômes de Bernstein

Dans ce chapitre sont abordées la définition et les premières propriétés de la base de Bernstein associée à un simplexe en dimension $k \geq 1$.

Le cas univarié des polynômes de Bernstein sur un intervalle est bien connu (voir [BPR]), et l'article récent [BCR]). On généralise ici la définition et les propriétés fondamentales des polynômes de Bernstein sur un simplexe de \mathbb{R}^k , et on présente une version multivariée de l'algorithme, dû à De Casteljau, d'évaluation et de subdivision.

1.1 Simplexes et coordonnées barycentriques

L'objet de cette section est d'introduire les notions de simplexe et de coordonnées barycentriques associées. Ces dernières se montreront plus utiles que les usuelles coordonnées cartésiennes pour étudier les polynômes sur les simplexes. Rappelons tout d'abord la

Définition 1.1.

Soient V_0, \dots, V_l ($l \geq 0$) des points de \mathbb{R}^k affinement indépendants.

Le l -simplexe de sommets V_0, \dots, V_l , noté $[V_0, \dots, V_l]$, est l'enveloppe convexe des points V_0, \dots, V_l dans \mathbb{R}^k .

Autrement dit,

$$[V_0, \dots, V_l] = \left\{ \lambda_0 V_0 + \dots + \lambda_l V_l \mid \forall i, \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=0}^l \lambda_i = 1 \right\}.$$

Remarque : La dimension du l -simplexe $[V_0, \dots, V_l]$ est l .

Définition 1.2.

Une m -face du l -simplexe $[V_0, \dots, V_l]$ est un simplexe du type $[V_{i_0}, \dots, V_{i_m}]$, où

$$\{i_0, \dots, i_m\} \subset \{0, \dots, l\}.$$

Une 1-face est appelée arête.

Remarque : Les 0-faces du simplexe $[V_0, \dots, V_l]$ sont ses sommets.

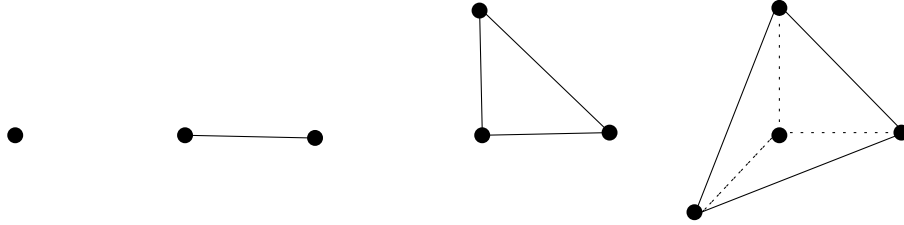


FIGURE 1.1 – Simplexes de dimension 0, 1, 2 et 3

Remarque : Par la suite, les simplexes étudiés seront souvent de la même dimension que l'espace ambiant.

Si $V = [V_0, \dots, V_k]$ est un simplexe de \mathbb{R}^k , tout point $x \in \mathbb{R}^k$ peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$x = \lambda_0(x)V_0 + \dots + \lambda_k(x)V_k$$

où les $\lambda_i \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ sont des polynômes affines, positifs sur V et satisfont l'égalité polynomiale

$$\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1.$$

Définition 1.3.

Les nombres $\lambda_0(x), \dots, \lambda_k(x)$ sont appelés coordonnées barycentriques de x associées à V .

Remarque : Les coordonnées barycentriques sont uniques à permutation de sommets de V près. Par la suite, on se fixera un ordre sur les sommets des simplexes considérés.

Matriciellement, les égalités ci-dessus s'écrivent de façon plus condensée :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_k \\ 1 \end{pmatrix} = P_V \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix},$$

où, notant V_{ij} les coordonnées du sommet V_j , P_V est la matrice

$$P_V = \begin{pmatrix} V_{10} & \dots & V_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ V_{k0} & \dots & V_{kk} \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Par définition, le simplexe V est non dégénéré : ses sommets V_0, \dots, V_k sont affinement indépendants. Cette dernière condition se traduit par l'inversibilité de la matrice P_V (il suffit pour le prouver de retrancher la première colonne à chacune des autres, et de développer le déterminant par rapport à la dernière ligne).

Exemple 1.4. Le simplexe standard Δ_k de dimension k est défini de la manière suivante :

$$\Delta_k := \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid \forall i, x_i \geq 0 \text{ et } \sum x_i = 1\}.$$

On note (e_1, \dots, e_k) la base canonique de \mathbb{R}^k . On considère l'ordre des sommets suivant :

$$\Delta_k = [\vec{0}, e_1, \dots, e_k].$$

Les coordonnées barycentriques associées à Δ_k sont alors données par :

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1 - X_1 - \dots - X_k \\ \lambda_i &= X_i \quad (i = 1, \dots, k) \end{aligned}$$

Les simplexes standard de dimension 0, 1, 2 et 3 sont représentés dans la figure 1.1.

1.2 Base de Bernstein

Dans le reste de ce chapitre, V désigne un simplexe non dégénéré de \mathbb{R}^k donné par ses sommets

$$V = [V_0, \dots, V_k] \subset \mathbb{R}^k$$

et dont les coordonnées barycentriques associées sont notées $\lambda_0, \dots, \lambda_k$. On peut dès lors définir les polynômes de Bernstein associés à V .

Définition 1.5.

Soit $d \in \mathbb{N}$ and $\alpha \in \mathbb{N}^{k+1}$ tels que $|\alpha| = d$.

Le α^{eme} polynôme de Bernstein de degré d associé au simplexe V est

$$B_\alpha^d := \binom{d}{\alpha} \lambda^\alpha = \frac{d!}{\alpha_0! \dots \alpha_k!} \lambda_0^{\alpha_0} \dots \lambda_k^{\alpha_k}.$$

Remarque : Dans le cas $k = 1$, on retrouve bien la définition habituelle des polynômes de Bernstein sur un intervalle (cf [BPR]).

Comme dans le cas univarié, on a la proposition fondamentale suivante :

Proposition 1.6. Les polynômes de Bernstein de degré d associés au simplexe V forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_d[X_1, \dots, X_k]$ des polynômes de degré $\leq d$.

Preuve :

- On a l'égalité :

$$\text{card} \left\{ \alpha \in \mathbb{N}^{k+1} \mid |\alpha| = d \right\} = \binom{k+d}{d} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_d[X_1, \dots, X_k].$$

Il suffit donc de montrer que les $(B_\alpha^d)_{|\alpha|=d}$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}_d[X_1, \dots, X_k]$.

- Considérons tout d'abord le cas où V est le simplexe standard $\Delta := \Delta_k$.

On a alors $\lambda_i = X_i$ pour $i = 1, \dots, k$ et $\lambda_0 = 1 - X_1 - \dots - X_k$.

Par définition des $(B_\alpha^d)_{|\alpha|=d}$, il suffit de montrer que la famille $(\lambda^\alpha)_{|\alpha|=d}$ est génératrice.

Soit $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ de degré $\leq d$. Quitte à rajouter des termes nuls, on peut écrire f sous la forme :

$$f = \sum_{|\beta| \leq d} a_\beta X^\beta = \sum_{\beta_1 + \dots + \beta_k \leq d} a_{\beta_1 \dots \beta_k} X_1^{\beta_1} \dots X_k^{\beta_k}.$$

Moyennant l'égalité polynomiale

$$1 = \sum_{i=1}^k X_i + \left(1 - \sum_{i=1}^k X_i\right) = \sum_{i=0}^k \lambda_i,$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} f &= \sum_{|\beta| \leq d} a_\beta X_1^{\beta_1} \dots X_k^{\beta_k} \left[\sum_{i=1}^k X_i + \left(1 - \sum_{i=1}^k X_i\right) \right]^{d-|\beta|} \\ &= \sum_{|\beta| \leq d} a_\beta \lambda_1^{\beta_1} \dots \lambda_k^{\beta_k} \left[\sum_{i=0}^k \lambda_i \right]^{d-|\beta|}. \end{aligned}$$

En développant le crochet, on voit alors que f est un polynôme homogène de degré d en les $\lambda_i, i = 0, \dots, k$. Les $(\lambda^\alpha)_{|\alpha|=d}$ forment ainsi une famille génératrice de $\mathbb{R}_d[X_1, \dots, X_k]$.

- On se place maintenant dans le cas d'un simplexe V non-dégénéré quelconque. Soit $\lambda_i^{[V]}$ (resp. $\lambda_i^{[\Delta]}$) les coordonnées barycentriques associées à V (resp. à Δ). On a alors

$$\begin{pmatrix} \lambda_0^{[V]} \\ \vdots \\ \lambda_k^{[V]} \end{pmatrix} = P_V^{-1} P_\Delta \begin{pmatrix} \lambda_0^{[\Delta]} \\ \vdots \\ \lambda_k^{[\Delta]} \end{pmatrix}.$$

La conclusion s'ensuit. ■

Tout polynôme $f \in \mathbb{R}_d[X_1, \dots, X_k]$ s'écrit donc de manière unique sous la forme

$$f = \sum_{|\alpha|=d} b_\alpha^d B_\alpha^d.$$

Les b_α^d sont appelés coefficients de Bernstein de f de degré d sur le simplexe V . Quand le contexte est explicite, on notera simplement b_α (respectivement B_α) en lieu et place de b_α^d (respectivement B_α^d).

Remarque : La proposition précédente fournit un algorithme pour convertir un polynôme de la base des monômes vers la base de Bernstein associée au simplexe V .

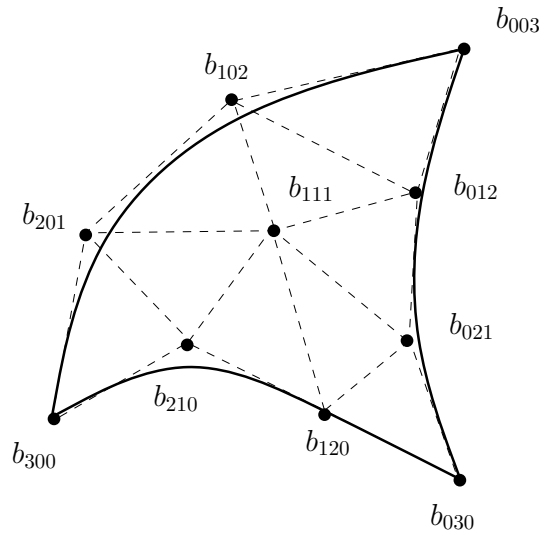


FIGURE 1.2 – Graphe et coefficients de Bernstein d'un polynôme en 2 variables de degré 3.

Exemple 1.7. Soit $k \geq 1$, et $f = (1 - 2X_1)^d \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$. L'écriture

$$f = \sum_{|\alpha|=d} b_\alpha^d B_\alpha^d$$

de f dans la base de Bernstein de degré d associée au simplexe standard Δ s'obtient de la manière suivante :

$$\begin{aligned} f &= (1 - 2X_1)^d \\ &= \left[\left(1 - \sum_{i=1}^k X_i \right) + \sum_{i=1}^k X_i - 2X_1 \right]^d \\ &= \left[\left(1 - \sum_{i=1}^k X_i \right) - X_1 + \sum_{i=2}^k X_i \right]^d \\ &= \sum_{|\alpha|=d} \binom{d}{\alpha} (-1)^{\alpha_1} \left(1 - \sum_{i=1}^k X_i \right)^{\alpha_0} X_1^{\alpha_1} \dots X_k^{\alpha_k} \\ &= \sum_{|\alpha|=d} (-1)^{\alpha_1} B_\alpha^d. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient finalement

$$\forall |\alpha| = d, \quad b_\alpha^d = (-1)^{\alpha_1}.$$

Exemple 1.8. Soit $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ de degré d et de valuation ≥ 2 , ie ne contenant pas de termes constants ni de degré 1, considéré sur le simplexe standard Δ . Alors pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$, $b_{(d-1)e_0+e_i}(f, d, \Delta) = 0$.

En effet, lors de l'homogénéisation en les coordonnées barycentriques $(\lambda_i)_{i=0, \dots, k}$, les coefficients du type $b_{(d-1)e_0+e_i}(f, d, \Delta)$ correspondent à des produits du type $\lambda_0^{d-1} \lambda_i$ ou λ_0^d , qui ne peuvent apparaître qu'avec les termes de degré ≤ 1 .

Proposition 1.9. Soit V un simplexe non dégénéré de \mathbb{R}^k , et Aff une transformation affine (bijective) de \mathbb{R}^k . On pose $\tilde{V} = Aff(V)$.

Soit $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ un polynôme de degré d . On note

$$f \circ Aff = \sum_{|\alpha|=d} b_\alpha^d B_\alpha^d$$

l'écriture de $f \circ Aff$ dans la base de Bernstein de degré d associée au simplexe V et

$$f = \sum_{|\alpha|=d} \tilde{b}_\alpha^d \tilde{B}_\alpha^d$$

l'écriture de f dans la base de Bernstein de degré d associée au simplexe \tilde{V} .

Alors

$$\forall \alpha, \quad \tilde{b}_\alpha^d = b_\alpha^d.$$

Preuve :

En effet, Puisque Aff conserve les coordonnées barycentriques, on a :

$$B_\alpha^d(x) = \tilde{B}_\alpha^d[Aff(x)].$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} f(Aff(x)) &= \sum_{|\alpha|=d} \tilde{b}_\alpha^d \tilde{B}_\alpha^d(Aff(x)) \\ &= \sum_{|\alpha|=d} \tilde{b}_\alpha^d B_\alpha^d(x). \end{aligned}$$

Or

$$f(Aff(x)) = \sum_{|\alpha|=d} b_\alpha^d B_\alpha^d(x),$$

donc

$$\forall \alpha, \quad b_\alpha^d = \tilde{b}_\alpha^d,$$

comme annoncé. ■

1.3 Propriétés de la base de Bernstein

Soit $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ un polynôme de degré d , et $V = [V_0, \dots, V_k]$ un simplexe non dégénéré de \mathbb{R}^k . On considère la base de Bernstein $(B_\alpha^d)_{|\alpha|=d}$ associée. Comme dans le cas univarié, cette base jouit des propriétés suivantes :

- (positivité) les polynômes B_α^d sont positifs sur V .
- (partition de l'unité) $\sum_{|\alpha|=d} B_\alpha^d = 1$.
- (précision affine) Supposons $\deg(f) \leq 1$, et notons N_α le point $\frac{\alpha_0 V_0 + \dots + \alpha_k V_k}{d}$. Pour tout degré $d \geq 1$, on a alors :

$$f = \sum_{|\alpha|=d} f(N_\alpha) B_\alpha^d. \tag{1.1}$$

– (interpolation aux sommets)

$$\forall i \in \{0, \dots, k\}, \quad f(V_i) = b_{de_i}. \quad (1.2)$$

– (relation de récurrence)

$$\forall |\alpha| = d, \quad B_\alpha^d = \lambda_0 B_{\alpha-e_0}^{d-1} + \dots + \lambda_k B_{\alpha-e_k}^{d-1}, \quad (1.3)$$

où $e_0 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_k = (0, \dots, 0, 1)$ est la base canonique de \mathbb{R}^{k+1} et où l'on a posé $B_{(0, \dots, 0)}^0 = 0$ et où, par convention, les polynômes de Bernstein associés aux multi-indices α admettant une composante strictement négative sont nuls.

– La liste des coefficients de Bernstein de f sur V fournit également un encadrement de f sur V . En effet, l'égalité

$$f = \sum_{|\alpha|=d} b_\alpha^d B_\alpha^d.$$

exprime f comme une combinaison convexe des coefficients b_α^d . On en déduit l'encadrement de f suivant, valable sur V :

$$\min_{|\alpha|=d} b_\alpha^d \leq f \leq \max_{|\alpha|=d} b_\alpha^d. \quad (1.4)$$

1.4 Algorithme de De Casteljau

Tout polynôme exprimé dans la base de Bernstein de degré d associée à un simplexe $V = [V_0, \dots, V_k]$ peut être évalué à l'aide d'un algorithme basé sur la relation de récurrence 1.3 : c'est l'algorithme de De Casteljau. Cette section présente cet algorithme dans le cadre multivarié.

Algorithme 1 Algorithme de De Casteljau : évaluation

ENTRÉES : une liste $b = (b_\alpha)_{|\alpha|=d}$ représentant un polynôme f de degré $\leq d$ dans la base de Bernstein de degré d associée à un simplexe V , de coordonnées barycentriques associées $\lambda_0, \dots, \lambda_k$, et un point $M \in \mathbb{R}^k$.

SORTIES : l'évaluation $f(M)$ de f au point M .

Initialisation : $b_\alpha^{(0)} := b_\alpha, |\alpha| = d$.

pour $l = 1, \dots, d$ **faire**

pour $|\alpha| = d - l$ **faire**

 calculer $b_\alpha^{(l)} := \sum_{p=0}^k \lambda_p(M) b_{\alpha+e_p}^{(l-1)}$

fin pour

fin pour

Retourner $b_{(0, \dots, 0)}^{(d)}$.

Correction de l'algorithme :

On montre par induction la propriété suivante :

$$\mathcal{P}_l : f(M) = \sum_{|\alpha|=d-l} b_\alpha^{(l)} B_\alpha^{(d-l)}(M)$$

pour $l \in \{0, \dots, d\}$.

- Le cas $l = 0$ est évident.
 - Soit $l \geq 1$. Supposons \mathcal{P}_{l-1} , et montrons \mathcal{P}_l .
-

En utilisant l'hypothèse de récurrence puis la relation de récurrence 1.3 pour le degré $d - l + 1$, on obtient successivement :

$$\begin{aligned}
 f(M) &= \sum_{|\alpha|=d-l+1} b_{\alpha}^{(l-1)} B_{\alpha}^{(d-l+1)}(M) \\
 &= \sum_{|\alpha|=d-l+1} b_{\alpha}^{(l-1)} \sum_{p=0}^k \lambda_p(M) B_{\alpha-e_p}^{(d-l)}(M) \\
 &= \sum_{|\beta|=d-l} b_{\beta+e_p}^{(l-1)} \sum_{p=0}^k \lambda_p(M) B_{\beta}^{(d-l)}(M) \\
 &= \sum_{|\beta|=d-l} \left(\sum_{p=0}^k \lambda_p(M) b_{\beta+e_p}^{(l-1)} \right) B_{\beta}^{(d-l)}(M) \\
 &= \sum_{|\beta|=d-l} b_{\beta}^{(l)} B_{\beta}^{(d-l)}(M),
 \end{aligned}$$

et l'on a donc montré \mathcal{P}_l .

En particulier, on a montré $\mathcal{P}_d : f(M) = b_{(0,\dots,0)}^{(d)}$. ■

Il est intéressant pour la suite (cf section suivante) de noter que les coefficients $b_{\alpha}^{(l)}$ générés dans l'algorithme de De Casteljau sont des polynômes de degré d en M , donnés par la proposition suivante :

Proposition 1.10. *Avec les notations précédentes, on a :*

$$\forall l \in \{0, \dots, d\}, \forall |\alpha| = d - l, \quad b_{\alpha}^{(l)} = \sum_{|\beta|=l} b_{\alpha+\beta} B_{\beta}^l(M).$$

Preuve :

On procède par induction sur l .

- Le cas $l = 0$ est clair.
- Soit $l \geq 1$, et supposons l'identité vraie pour $l - 1$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
 b_{\alpha}^{(l)} &= \sum_{p=0}^k \lambda_p(M) b_{\alpha+e_p}^{(l-1)} \\
 &= \sum_{p=0}^k \lambda_p(M) \sum_{|\gamma|=l-1} b_{\alpha+e_p+\gamma} B_{\gamma}^{l-1}(M) \\
 &= \sum_{p=0}^k \lambda_p(M) \sum_{|\beta|=l} b_{\alpha+\beta} B_{\beta-e_p}^{l-1}(M) \\
 &= \sum_{|\beta|=l} b_{\alpha+\beta} \sum_{p=0}^k \lambda_p(M) B_{\beta-e_p}^{l-1}(M) \\
 &= \sum_{|\beta|=l} b_{\alpha+\beta} \left(\sum_{p=0}^k \frac{\beta_p}{l} \right) B_{\beta}^l(M) \\
 &= \sum_{|\beta|=l} b_{\alpha+\beta} B_{\beta}^l(M) \frac{|\beta|}{l}
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{|\beta|=l} b_{\alpha+\beta} B_{\beta}^l(M),$$

ce qui montre l'identité au rang l .

On a donc montré l'identité pour tout $l \in \{0, \dots, d\}$, CQFD. ■

Remarque : D'autres algorithmes d'évaluation existent. Dans le cas univarié, on peut citer une adaptation du schéma de Hörner (cf remarque 4 du paragraphe 2.3 de [PBP]). Cependant, la section suivante présente l'avantage de l'algorithme de De Casteljau et son utilisation lors de subdivisions de simplexes.

1.5 Subdivision

Algorithme de De Casteljau en un point intérieur

Dans le cas univarié, l'algorithme de De Casteljau, connaissant les coefficients de Bernstein d'un polynôme $f \in \mathbb{R}[X]$ sur un intervalle I , calcule les coefficients de Bernstein de f sur deux sous-intervalles I_1 et I_2 subdivisant I ([BPR],[BCR]). On généralise dans cette partie cette propriété de l'algorithme de De Casteljau en dimension quelconque.

On considère un simplexe non-dégénéré $V = [V_0, \dots, V_k] \subset \mathbb{R}^k$ et un point $M \in V$ intérieur à V . Pour $i = 0, \dots, k$, on considère les sous-simplexes

$$V^{[i]} := [V_0, \dots, V_{i-1}, M, V_{i+1}, \dots, V_k].$$

Notation : Pour $\alpha \in \mathbb{N}^{k+1}$ et pour $i = 0, \dots, k$, on note

$$\hat{\alpha}_i := (\alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_k).$$

L'algorithme suivant calcule les coefficients de Bernstein de f sur les simplexes $V^{[i]}$ à partir des coefficients de Bernstein de f sur V .

Algorithme 2 Algorithme de De Casteljau : subdivision en un point intérieur

ENTRÉES: une liste $b = (b_{\alpha})_{|\alpha|=d}$ représentant un polynôme f de degré $\leq d$ dans la base de Bernstein de degré d associée à un simplexe V , et un point $M \in V$ intérieur à V .

SORTIES: les listes $b^{[i]} = (b_{\alpha}^{[i]})_{|\alpha|=d}$ représentant f dans les bases de Bernstein de degré d associées aux simplexes $V^{[i]}$, $i = 0, \dots, k$.

Initialisation : $b_{\alpha}^{(0)} := b_{\alpha}$, $|\alpha| = d$.

pour $l = 1, \dots, d$ **faire**

pour $|\alpha| = d - l$ **faire**

$$\text{calculer } b_{\alpha}^{(l)} := \sum_{p=0}^k \ell_p(M) b_{\alpha+e_p}^{(l-1)}$$

fin pour

fin pour

Retourner $b_{\alpha}^{[i]} := b_{\hat{\alpha}_i}^{(\alpha_i)}$ ($|\alpha| = d$, $i = 0, \dots, k$).

Correction de l'algorithme :

Il suffit de considérer le sous-simplexe $V^{[0]} = [M, V_1, \dots, V_k]$.

Par la suite, on note $\lambda_0, \dots, \lambda_k$ (respectivement $\tilde{\lambda}_0, \dots, \tilde{\lambda}_k$) les coordonnées barycentriques associées au simplexe V (respectivement $V^{[0]}$), et B_α^d (respectivement \tilde{B}_α^d) les polynômes de Bernstein de degré d associés.

Des identités suivantes

$$\begin{aligned} M &= \lambda_0(M)V_0 + \dots + \lambda_k(M)V_k \\ X &= \tilde{\lambda}_0(X)M + \tilde{\lambda}_1(X)V_1 + \dots + \tilde{\lambda}_k(X)V_k, \end{aligned}$$

on déduit :

$$X = \tilde{\lambda}_0(X)\lambda_0(M)V_0 + \left(\tilde{\lambda}_1(X) + \tilde{\lambda}_0(X)\lambda_1(M)\right)V_1 + \dots + \left(\tilde{\lambda}_k(X) + \tilde{\lambda}_0(X)\lambda_k(M)\right)V_k.$$

Les coordonnées barycentriques associées à V vérifient donc :

$$\begin{aligned} \lambda_0(X) &= \tilde{\lambda}_0(X)\lambda_0(M) \\ \lambda_i(X) &= \tilde{\lambda}_i(X) + \tilde{\lambda}_0(X)\lambda_i(M) \quad (i = 1, \dots, k). \end{aligned}$$

Les polynômes de Bernstein de degré d associés à V s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} B_\alpha^d(X) &= \binom{d}{\alpha} \left[\tilde{\lambda}_0(X)\lambda_0(M)\right]^{\alpha_0} \prod_{i=1}^k \left[\tilde{\lambda}_i(X) + \tilde{\lambda}_0(X)\lambda_i(M)\right]^{\alpha_i} \\ &= \sum_{\beta \leq \bar{\alpha}} \binom{d}{\alpha} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \dots \binom{\alpha_k}{\beta_k} \tilde{\lambda}_0^{\alpha_0+|\beta|}(X) \tilde{\lambda}^{\bar{\alpha}-\beta}(X) \lambda^{(\alpha_0, \beta)}(M), \end{aligned}$$

où l'on a noté, si $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_k)$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \\ (\alpha_0, \beta) &= (\alpha_0, \beta_1, \dots, \beta_k). \end{aligned}$$

L'inégalité $\beta \leq \bar{\alpha}$ signifie $\beta_i \leq \alpha_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$.

On obtient finalement :

$$B_\alpha^d(X) = \sum_{\beta \leq \bar{\alpha}} \tilde{B}_{(\alpha_0+|\beta|, \bar{\alpha}-\beta)}^d(X) B_{(\alpha_0, \beta)}^{\alpha_0+|\beta|}(M).$$

L'identité $f(M) = \sum_{|\alpha|=d} b_\alpha B_\alpha^d(X)$ fournit alors :

$$f(M) = \sum_{|\alpha|=d} b_\alpha \sum_{\beta \leq \bar{\alpha}} \tilde{B}_{(\alpha_0+|\beta|, \bar{\alpha}-\beta)}^d(X) B_{(\alpha_0, \beta)}^{\alpha_0+|\beta|}(M),$$

et le coefficient correspondant à $|\gamma| = d$ est donné par :

$$\sum_{|(\alpha_0, \beta)|=\gamma_0} b_{(\alpha_0, \bar{\gamma}+\beta)} \tilde{B}_\gamma^{\gamma_0}(M).$$

La proposition 1.10 montre alors que cette dernière quantité est égale à $b_{(0, \bar{\gamma})}^{(\gamma_0)}$, ce qu'il fallait démontrer.

■

On peut visualiser les coefficients générés par l'algorithme de De Casteljau sous forme tétraédrale, comme dans la figure suivante (cas $d = 2$).

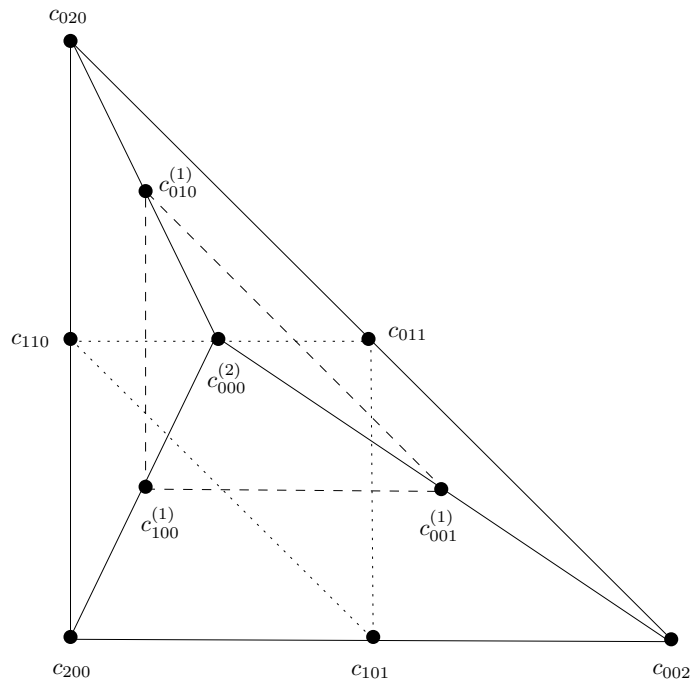


FIGURE 1.3 – Visualisation tétraédrale de l’algorithme de De Casteljau, cas $d = 2$.

Algorithme de De Casteljau en point situé sur une arête

L’algorithme précédent s’applique avec un point M intérieur au simplexe V . On peut également choisir le point M sur une arête $[V_p, V_q]$ et subdiviser V en deux sous-simplexes V^p et V^q , obtenus en remplaçant le sommet V_p (respectivement V_q) par M . L’algorithme précédent fournit alors les coefficients de Bernstein sur les deux sous-simplexes, mais effectue des opérations inutiles.

On peut alors le simplifier de la manière suivante : le calcul fait dans les boucles Pour devient simplement

$$b_\alpha^{(l)} := \ell_p(M)b_{\alpha+e_p}^{(l-1)} + \ell_q(M)b_{\alpha+e_q}^{(l-1)}.$$

En permutant les deux boucles Pour, on écrit alors l’algorithme sous la forme suivante :

Algorithme 3 Algorithme de De Casteljau : subdivision en un point situé sur une arête

ENTRÉES: une liste $b = (b_\alpha)_{|\alpha|=d}$ représentant un polynôme f de degré $\leq d$ dans la base de Bernstein de degré d associée à un simplexe V , et un point $M \in V$ situé sur une arête $[V_p, V_q]$.

SORTIES: les listes $b^{[p]} = (b_\alpha^{[p]})_{|\alpha|=d}$ et $b^{[q]} = (b_\alpha^{[q]})_{|\alpha|=d}$ représentant f dans les bases de Bernstein de degré d associées aux simplexes V^p et V^q .

Initialisation : $b_\alpha^{(0)} := b_\alpha, |\alpha| = d$.

```

pour  $|\widehat{\alpha}_{p,q}| < d$  faire
  calculer  $\delta := d - |\widehat{\alpha}_{p,q}|$ 
  pour  $l = 1, \dots, \delta$  faire
    pour  $\alpha_p + \alpha_q = \delta - l$  faire
      calculer  $b_\alpha^{(l)} := \ell_p(M)b_{\alpha+e_p}^{(l-1)} + \ell_q(M)b_{\alpha+e_q}^{(l-1)}$ 
    fin pour
  fin pour
fin pour
Retourner  $b_\alpha^{[i]} := b_{\alpha_i}^{(\alpha_i)} (|\alpha| = d, i = 0, \dots, k)$ .
  
```

où l'on a noté $\widehat{\alpha}_{p,q} = (\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}, \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_{q-1}, \alpha_{q+1}, \dots, \alpha_k)$.

On voit alors apparaître dans les deux boucles Pour intérieures un algorithme de De Casteljau univarié. La figure suivante illustre ce fait dans le cas $d = 2$.

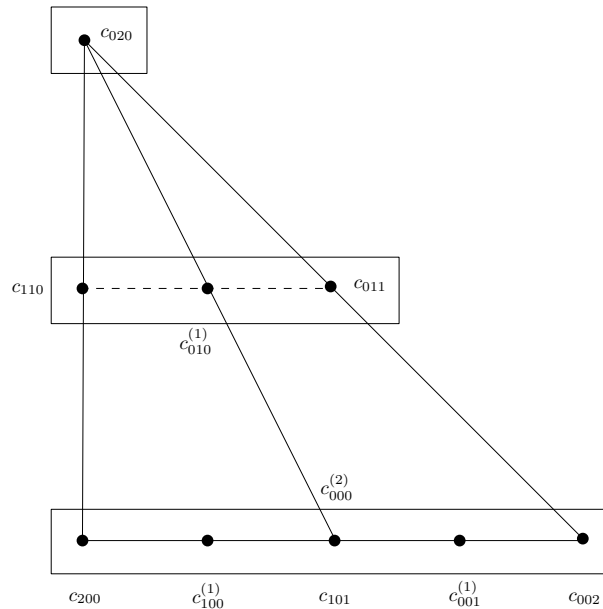


FIGURE 1.4 – Algorithme de De Casteljau sur une arête, cas $d = 2$.

Exemple 1.11. Soit $V = [V_0, \dots, V_k]$ et $W = [W_0, \dots, W_k]$ deux simplexes non dégénérés de \mathbb{R}^k . Connaissant l'écriture de Bernstein de f sur V

$$f = \sum_{|\alpha|=d} b_\alpha^d B_\alpha^d,$$

on peut calculer l'écriture de f sur W

$$f = \sum_{|\alpha|=d} \tilde{b}_\alpha \tilde{B}_\alpha^d$$

à l'aide d'applications successives de l'algorithme de De Casteljaou. On parle alors de reparamétrisation.

La première étape est de calculer l'écriture de Bernstein de f sur le simplexe

$$V^{(1)} = [W_0, V_1, \dots, V_k],$$

puis successivement sur chaque simplexe

$$V^{(i)} = [W_0, \dots, W_{i-1}, V_i, \dots, V_k].$$

On obtient alors finalement l'écriture de f sur $W = V^{(k+1)}$ au bout de $k+1$ applications de l'algorithme de De Casteljaou. Si W est inclus dans V , l'algorithme de De Casteljaou n'effectue que des combinaisons convexes des coefficients de Bernstein de f sur V .

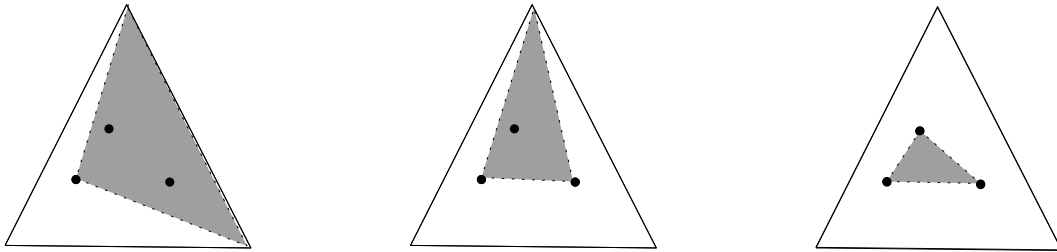


FIGURE 1.5 – Exemple de reparamétrisation en dimension 2.

1.6 Elévation du degré

Un polynôme $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ de degré $d \geq 0$ sur un simplexe V peut s'exprimer dans toute base de Bernstein de degré $D > d$ associée au simplexe V . Une telle représentation est appelée élévation du degré.

On note $\lambda_0, \dots, \lambda_k$ les coordonnées barycentriques associées à V , $\mathcal{B}^d = (B_\alpha^d)_{|\alpha|=d}$ et $\mathcal{B}^D = (B_\beta^D)_{|\beta|=D}$ les bases de Bernstein de degré d et D associées à V .

Si l'on note également $(b_\alpha^d)_{|\alpha|=d}$ et $(b_\beta^D)_{|\beta|=D}$ les coefficients de Bernstein de f dans ces bases, on a alors la formule d'élévation du degré suivante :

Proposition 1.12. $\forall |\beta| = D, \quad b_\beta^D = \sum_{|\alpha|=d} \frac{\binom{d}{\alpha} \binom{D-d}{\beta-\alpha}}{\binom{D}{\beta}} b_\alpha^d,$

où, par convention, $\binom{D-d}{\beta-\alpha} = 0$ si $\beta - \alpha$ admet une composante strictement négative.

Preuve :

Par linéarité, il suffit de montrer la proposition pour $f = B_\alpha^d$. On a alors :

$$B_\alpha^d = \binom{d}{\alpha} \lambda^\alpha = \binom{d}{\alpha} \lambda_0^{\alpha_0} \dots \lambda_k^{\alpha_k}$$

$$\begin{aligned}
 &= \binom{d}{\alpha} \lambda^\alpha (\lambda_0 + \dots + \lambda_k)^{D-d} \\
 &= \binom{d}{\alpha} \lambda^\alpha \left(\sum_{|\gamma|=D-d} \binom{D-d}{\gamma} \lambda^\gamma \right) \\
 &= \sum_{|\gamma|=D-d} \binom{d}{\alpha} \binom{D-d}{\gamma} \lambda^{\alpha+\gamma} \\
 &= \sum_{|\gamma|=D-d} \frac{\binom{d}{\alpha} \binom{D-d}{\gamma}}{\binom{D}{\alpha+\gamma}} B_{\alpha+\gamma}^D \\
 &= \sum_{|\beta|=D} \frac{\binom{d}{\alpha} \binom{D-d}{\beta-\alpha}}{\binom{D}{\beta}} B_\beta^D,
 \end{aligned}$$

avec la convention $\binom{D-d}{\beta-\alpha} = 0$ si $\beta - \alpha$ n'est pas positif, et la conclusion s'ensuit. ■

Exemple 1.13. On peut ainsi calculer les élévations du degré des polynômes de degré ≤ 2 sur le simplexe standard $\Delta \subset \mathbb{R}^k$. Soit donc $D \geq 2$. Alors :

1. Le cas des polynômes de degré ≤ 1 est immédiat d'après la propriété de précision affine 1.1.

2. $\forall i \in \{1, \dots, k\}, \forall |\alpha| = D, \quad b_\alpha(X_i^2, \Delta, D) = \frac{\alpha_i(\alpha_i - 1)}{D(D-1)}.$

3. $\forall i \in \{1, \dots, k\}, \forall j \in \{1, \dots, k\}, j \neq i, \forall |\alpha| = D, \quad b_\alpha(X_i X_j, \Delta, D) = \frac{\alpha_i \alpha_j}{D(D-1)}.$

4. Ainsi, soit $q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ une forme quadratique, dont on note $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ la matrice symétrique associée :

$$q(X) = X M^t X,$$

où ${}^t X$ désigne le vecteur transposé de X .

Alors :

$$\forall |\alpha| = D, \quad b_\alpha^d = \frac{1}{D(D-1)} \left[(\alpha_1, \dots, \alpha_k) M^t (\alpha_1, \dots, \alpha_k) - \sum_{i=1}^k m_{ii} \alpha_i \right].$$

1.7 Dérivées

1.7.1 Dérivées barycentriques

Les dérivées des polynômes de Bernstein de degré d associés à un simplexe non dégénéré V sont aisément calculables.

En effet, soient $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_k)$ les coordonnées barycentriques associées à V . Considérons pour l'instant les λ_i comme des variables indépendantes, et écrivons les polynômes de Bernstein en fonction des λ_i :

$$B_\alpha^d(\lambda) = \binom{d}{\alpha} \lambda^\alpha = \binom{d}{\alpha} \lambda_0^{\alpha_0} \dots \lambda_k^{\alpha_k}.$$

On a alors :

$$\forall i \in \{0, \dots, k\}, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_i} B_\alpha^d(\lambda) = d B_{\alpha - e_i}^{d-1}(\lambda),$$

où les polynômes de Bernstein associés à un multi-indice non positif sont par convention nuls.

1.7.2 Dérivées directionnelles

On définit tout d'abord la notion de dérivée directionnelle :

Définition 1.14.

Soient U un vecteur de \mathbb{R}^k et $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$.

La dérivée directionnelle au point $M \in \mathbb{R}^k$ selon le vecteur U est la quantité

$$D_U f(M) = \frac{d}{dt} f(M + tU)|_{t=0}.$$

Si l'on note les coordonnées cartésiennes de U (U_1, \dots, U_k), on peut également écrire :

$$D_U f(M) = \sum_{i=1}^k U_i \frac{\partial}{\partial X_i} f(M).$$

On définit également les coordonnées directionnelles de U de la manière suivante :

Définition 1.15.

Il existe un unique $(k+1)$ -uplet $(a_0, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tel que

$$a_0 + \dots + a_k = 0$$

et

$$U = a_0 V_0 + \dots + a_k V_k.$$

Ces quantités sont appelées coordonnées directionnelles de U dans V .

Il s'agit en fait, si $U = M - N$ avec $M, N \in \mathbb{R}^k$, de la différence des coordonnées barycentriques de M et de N . Ceci est évidemment indépendant du choix de M et N .

On peut alors écrire :

$$D_U f(M) = \sum_{i=0}^k a_i \frac{\partial}{\partial \lambda_i} f(M).$$

On peut alors calculer les dérivées directionnelles d'un polynôme f en fonction de ses coefficients de Bernstein :

Proposition 1.16. Soient U un vecteur de \mathbb{R}^k , V un simplexe non dégénéré de \mathbb{R}^k , $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ de degré d , et

$$f = \sum_{|\alpha|=d} b_\alpha B_\alpha^d$$

son écriture dans la base de Bernstein de degré d associée à V .

La dérivée directionnelle de f selon U $D_U f$ est donnée par :

$$D_U f = d \sum_{|\beta|=d-1} c_\beta B_\beta^{d-1},$$

où c_β est donné par :

$$c_\beta = a_0 b_{\beta+e_0} + \dots + a_k b_{\beta+e_k}.$$

Preuve :

La preuve est immédiate à la vue du calcul des dérivées barycentriques effectué en début de section.

■

Répétant le procédé, on peut définir des dérivées directionnelles de tout ordre. On utilisera par exemple par la suite les dérivées directionnelles secondes.

Triangulation standard et polytope de contrôle

Les algorithmes présentés dans les chapitres 5 et 6 sont basés sur des méthodes dites de subdivision. Il s'agit, étant donné un simplexe V , de le raffiner en une collection de sous-simplexes le recouvrant. Nous introduisons dans cette section une telle subdivision, appelée triangulation standard.

2.1 Grille de contrôle

On définit tout d'abord la notion discrète de grille de contrôle.

2.1.1 Le cas univarié

Soit $f \in \mathbb{R}[X]$ de degré d , considéré sur le segment $I = [\ell, r]$, et

$$f(X) = \sum_{i=0}^d b_i B_i^d(X)$$

son écriture dans la base de Bernstein associée.

Définition 2.1.

Les abscisses de Gréville sont les points $\ell + \frac{i}{d}(r - \ell)$, pour $i \in \{0, \dots, d\}$.

Les points de contrôle associés à f sont les points $\left(\ell + \frac{i}{d}(r - \ell), b_i \right)$ ($i \in \{0, \dots, d\}$).

La ligne de contrôle \hat{f} de f est la ligne brisée (définie sur I) passant par les points de contrôle successifs.

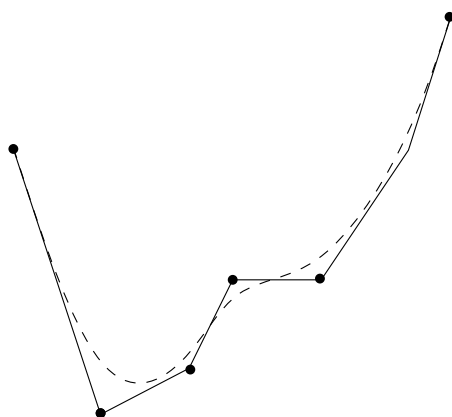


FIGURE 2.1 – Ligne de contrôle d'un polynôme en 1 variable de degré 5.

2.1.2 Le cas multivarié

On généralise les définitions précédentes. Soit $V = [V_0, \dots, V_k]$ un simplexe de \mathbb{R}^k , et $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ un polynôme de degré d .

Définition 2.2.

La grille de Gréville de degré d associée à V est l'ensemble des points $N_\alpha = \frac{\alpha_0 V_0 + \dots + \alpha_k V_k}{d}$. Les points de contrôle associés à f sont les points (N_α, b_α) (pour $|\alpha| = d$).

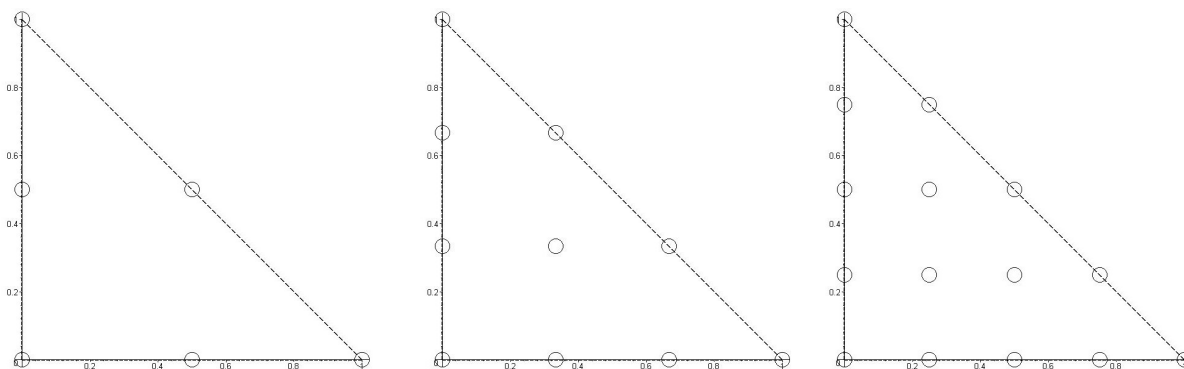


FIGURE 2.2 – Grilles de Gréville de degré 2, 3 et 4 associées au simplexe standard Δ .

La grille de contrôle de f est l'ensemble des points de contrôle associés à f .

L'objet des sections suivantes est d'introduire la notion (continue) de polytope de contrôle. Celle-ci nécessite la construction d'une triangulation du simplexe dont les sommets sont les points de la grille de Gréville.

2.2 Triangulation

Rappelons tout d'abord la

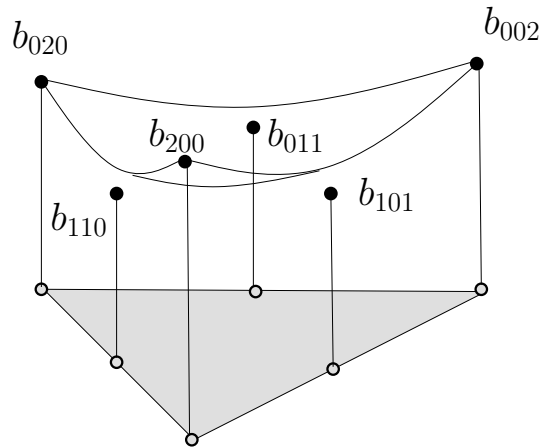


FIGURE 2.3 – Grille de contrôle d’un polynôme en 2 variables de degré 2.

Définition 2.3.

On appelle triangulation d’un simplexe $V \subset \mathbb{R}^k$ un ensemble fini de simplexes $V_i \subset \mathbb{R}^k$ vérifiant les conditions suivantes :

- (réalisation de V) $V = \bigcup_i V_i$
- les intérieurs de deux simplexes distincts V_i et V_j sont disjoints
- l’intersection de deux simplexes distincts V_i et V_j est soit vide, soit une face commune à V_i et V_j .

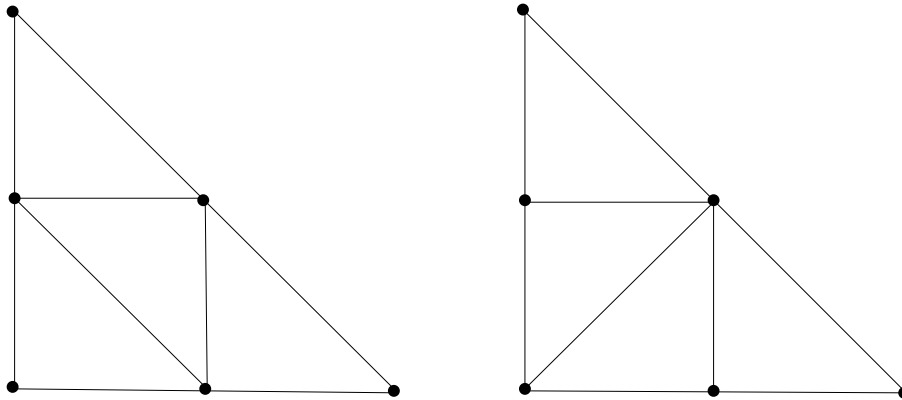


FIGURE 2.4 – Deux triangulations du simplexe standard en dimension 2.

Parmi les triangulations d’un simplexe non dégénéré V de \mathbb{R}^k , il en est une particulièrement adaptée à nos propos : la triangulation standard. Elle est basée sur une triangulation particulière du cube, appelée triangulation de Kuhn, introduite dans la section suivante.

2.3 Triangulation de Kuhn

Il est utile pour la suite de définir et d’étudier une triangulation particulière du cube, appelée triangulation de Kuhn.

tel-00349444, version 1 - 30 Dec 2008

On considère donc le cube \mathcal{C}^k de \mathbb{R}^k :

$$\mathcal{C}^k = [0, 1]^k = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid \forall i, 0 \leq x_i \leq 1\}.$$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ une permutation de $\{1, \dots, k\}$. On associe à σ le simplexe $V^\sigma = [V_0^\sigma, \dots, V_k^\sigma]$ dont les sommets sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} V_0^\sigma &= (0, \dots, 0) \\ V_i^\sigma &= e_{\sigma(1)} + \dots + e_{\sigma(i)} \quad (1 \leq i \leq k), \end{aligned}$$

où (e_1, \dots, e_k) désigne la base canonique de \mathbb{R}^k .

Remarque : Puisque σ est une permutation, on a $V_k^\sigma = (1, \dots, 1)$.

On peut également écrire V^σ sous la forme :

$$V^\sigma = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid 0 \leq x_{\sigma(k)} \leq \dots \leq x_{\sigma(1)} \leq 1\}.$$

Exemple 2.4. Si $k = 2$, cela donne lieu aux deux simplexes représentés dans la figure suivante, correspondant respectivement aux permutations $(1 \ 2)$ et $(2 \ 1)$ de \mathfrak{S}_2 .

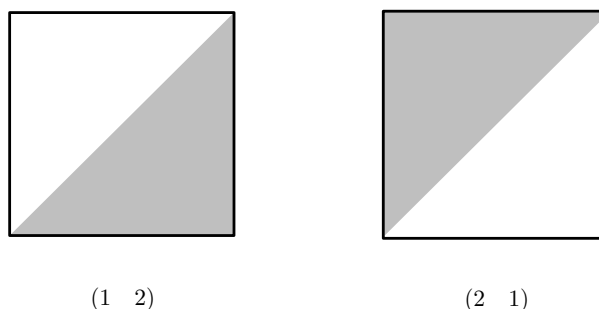


FIGURE 2.5 – Simplexes V^σ en dimension 2.

Exemple 2.5. Si $k = 3$, cela donne lieu aux six simplexes représentés dans la figure suivante, correspondant aux six permutations de \mathfrak{S}_3 .

Théorème 2.6. La collection de simplexes $(V^\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{S}_k}$ est une triangulation du cube \mathcal{C}^k .

Définition 2.7.

Cette triangulation est appelée triangulation du Kuhn du cube \mathcal{C}^k , notée $\mathcal{K}(\mathcal{C}^k)$.

Preuve :

- Il est clair que $\mathcal{C}^k = \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} V^\sigma$.
- Il reste à montrer que l'intersection de deux simplexes est soit vide, soit une face commune à ces deux simplexes.

On considère donc deux simplexes $V^\sigma = [V_0^\sigma, \dots, V_k^\sigma]$ et $V^\tau = [V_0^\tau, \dots, V_k^\tau]$ ($\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_k$, $\sigma \neq \tau$) dont l'intersection est non vide.

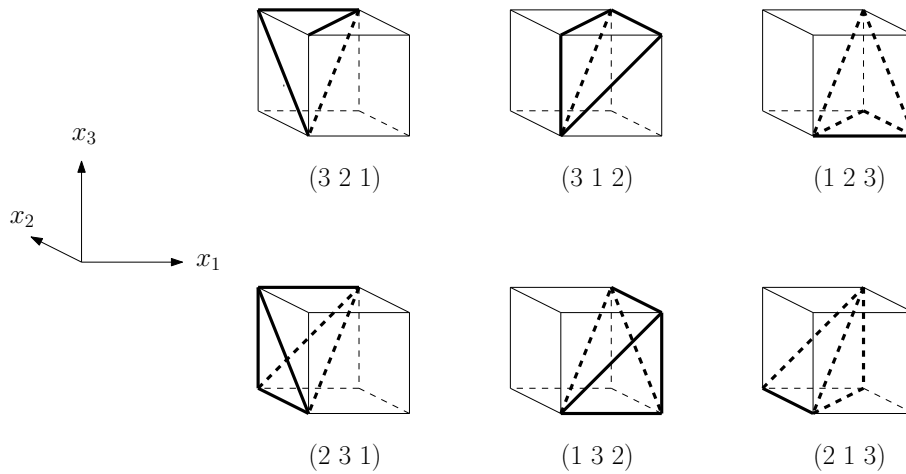


FIGURE 2.6 – Simplexes V^σ en dimension 3.

Soit S l'ensemble des sommets communs à V^σ et V^τ . S contient l'origine $(0, \dots, 0)$ et le point $(1, \dots, 1)$. Soit \mathcal{F} l'enveloppe convexe de S . C'est une face commune à V^σ et V^τ , et l'on va montrer qu'il s'agit en fait de leur intersection.

L'inclusion $\mathcal{F} \subset V^\sigma \cap V^\tau$ est évidente.
Montrons l'inclusion $V^\sigma \cap V^\tau \subset \mathcal{F}$.

Soit donc $x \in V^\sigma \cap V^\tau$. Il s'agit de montrer que x est une combinaison convexe des sommets de S .

Puisque $x \in V^\sigma$, il existe des entiers $i_1 < \dots < i_s \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$x_{\sigma(1)} = \dots = x_{\sigma(i_1)} > x_{\sigma(i_1+1)} = \dots = x_{\sigma(i_2)} > \dots > x_{\sigma(i_{s-1}+1)} = \dots = x_{\sigma(i_s)}.$$

De plus, puisque x appartient également à V^τ , on a :

$$x_{\tau(1)} = \dots = x_{\tau(i_1)} > x_{\tau(i_1+1)} = \dots = x_{\tau(i_2)} > \dots > x_{\tau(i_{s-1}+1)} = \dots = x_{\tau(i_s)},$$

ce qui implique que $\forall \ell \in \{1, \dots, s\}, \{\sigma(1), \dots, \sigma(i_\ell)\} = \{\tau(1), \dots, \tau(i_\ell)\}$. En particulier,

$$\forall \ell \in \{1, \dots, s\}, V_{i_\ell}^\sigma = V_{i_\ell}^\tau.$$

On peut alors écrire x sous la forme :

$$\begin{aligned} x &= x_{\sigma(i_1)} V_{i_1}^\sigma + x_{\sigma(i_2)} [V_{i_2}^\sigma - V_{i_1}^\sigma] + \dots + x_{\sigma(i_s)} [V_{i_s}^\sigma - V_{i_{s-1}}^\sigma] \\ &= [x_{\sigma(i_1)} - x_{\sigma(i_2)}] V_{i_1}^\sigma + \dots + [x_{\sigma(i_{s-1})} - x_{\sigma(i_s)}] V_{i_{s-1}}^\sigma + x_{\sigma(i_s)} V_{i_s}^\sigma + [1 - x_{\sigma(i_1)}] V_0^\sigma. \end{aligned}$$

Les sommets $V_0^\sigma, V_{i_1}^\sigma, \dots, V_{i_s}^\sigma$ étant respectivement égaux à $V_0^\tau, V_{i_1}^\tau, \dots, V_{i_s}^\tau$, on a donc écrit x comme combinaison convexe d'éléments de S . Ainsi, $x \in \mathcal{F}$ et l'on a montré que $V^\sigma \cap V^\tau \subset \mathcal{F}$.

Finalement, on a montré que $V^\sigma \cap V^\tau = \mathcal{F}$ est une face commune à V^σ et V^τ , CQFD. ■

Définition 2.8.

Pour toute transformation affine f , la triangulation de Kuhn de $f(\mathcal{C}^k)$ est définie par $\mathcal{K}(f(\mathcal{C}^k)) = f(\mathcal{K}(\mathcal{C}^k))$.

Remarque : Il s'agit bien d'une triangulation de $f(\mathcal{C}^k)$.

La triangulation de Kuhn jouit de la propriété suivante :

Proposition 2.9. $\mathcal{K}(\mathcal{C}^k)$ est compatible par translation, ie :
pour tout vecteur $v \in \{0, 1\}^k$, $\mathcal{K}(\mathcal{C}^k) \cup \mathcal{K}(v + \mathcal{C}^k)$ est une triangulation de $\mathcal{C}^k \cup (v + \mathcal{C}^k)$.

Preuve :

Il suffit de considérer les cubes \mathcal{C}^k et $e_i + \mathcal{C}^k$, et leur intersection $\mathcal{F} = \mathcal{C}^k \cap \{x_i = 1\}$, et de montrer que la triangulation de \mathcal{F} induite par la triangulation de Kuhn $\mathcal{K}(e_i + \mathcal{C}^k)$ est la même que celle de $\mathcal{C}^k \cap \{x_i = 0\}$ induite par $\mathcal{K}(\mathcal{C}^k)$ et translatée de e_i .

- Soit V^σ un simplexe de $\mathcal{K}(\mathcal{C}^k)$. On a alors l'équivalence suivante :

$$x \in V^\sigma \cap \{x_i = 0\}$$

si et seulement si x s'écrit

$$x = \lambda_1 e_{\sigma(1)} + \dots + \lambda_k [e_{\sigma(1)} + \dots + e_{\sigma(k)}],$$

avec $\forall i, \lambda_i \geq 0$, $\sum \lambda_i = 1$ et $\lambda_{\sigma^{-1}(i)} + \dots + \lambda_k = 0$.

Par conséquent, $x \in e_i + (V^\sigma \cap \{x_i = 0\})$ si et seulement si

$$x = \lambda_1 e_{\sigma(1)} + \dots + \lambda_k [e_{\sigma(1)} + \dots + e_{\sigma(k)}] + e_i,$$

avec $\forall i, \lambda_i \geq 0$, $\sum \lambda_i = 1$ et $\lambda_{\sigma^{-1}(i)} + \dots + \lambda_k = 0$.

- D'autre part, soit $V^{\sigma,(i)}$ un simplexe de $\mathcal{K}(e_i + \mathcal{C}^k)$. Alors $V^{\sigma,(i)}$ est l'enveloppe convexe de ses sommets $e_i, e_i + e_{\sigma(1)}, \dots, e_i + e_{\sigma(1)} + \dots + e_{\sigma(k)}$.

Ainsi, $x \in V^{\sigma,(i)} \cap \{x_i = 1\}$ si et seulement si x s'écrit

$$\begin{aligned} x &= \lambda_0 e_i + \lambda_1 [e_i + e_{\sigma(1)}] + \dots + \lambda_k [e_i + e_{\sigma(1)} + \dots + e_{\sigma(k)}] \\ &= e_i + \lambda_1 e_{\sigma(1)} + \dots + \lambda_k [e_{\sigma(1)} + \dots + e_{\sigma(k)}], \end{aligned}$$

avec $\forall i, \lambda_i \geq 0$, $\sum \lambda_i = 1$ et $1 + \lambda_{\sigma^{-1}(i)} + \dots + \lambda_k = 1$, ie $\lambda_{\sigma^{-1}(i)} + \dots + \lambda_k = 0$, CQFD. On a donc démontré la propriété annoncée. ■

2.4 Triangulation standard

On introduit maintenant une triangulation d'un simplexe, basée sur la triangulation de Kuhn du cube.

2.4.1 Exemple fondamental

On considère dans ce qui suit le simplexe

$$V = \left[\vec{0}, e_1, e_1 + e_2, \dots, e_1 + e_2 + \dots + e_k \right],$$

où $\vec{0}$ désigne le vecteur nul et (e_1, \dots, e_k) la base canonique de \mathbb{R}^k .

Soit $d \geq 1$ un entier, et F une application de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, d\}$, dont les images sont réordonnées en f_1, \dots, f_k (et avec, par convention, $f_0 = 0$ et $f_{k+1} = d$).

F permet de définir le point de la grille de Gréville (de degré d associée à V) suivant :

$$V_0^F = \frac{1}{d} \sum_{\ell=1}^k (f_{\ell+1} - f_\ell) (e_1 + \dots + e_\ell).$$

Remarque : Pour tout point de la grille de Gréville C de degré d associée à V , il existe une application $F \in \{1, \dots, d\}^{\{1, \dots, k\}}$ telle que $C = V_0^F$.

On définit également une application σ_F de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, k\}$ de la manière suivante :

$$\forall j \in \{1, \dots, k\}, \quad \sigma_F(j) = \#\{\ell \in \{1, \dots, k\} \mid F(\ell) < F(j)\} + \#\{\ell \in \{1, \dots, j\} \mid F(\ell) = F(j)\}.$$

On a alors la

Proposition 2.10. σ_F est une permutation de $\{1, \dots, k\}$.

Preuve :

Il suffit de montrer que $i \neq j$ implique $\sigma_F(i) \neq \sigma_F(j)$.

On considère donc deux indices $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $i \neq j$.

- Supposons tout d'abord que $F(i) \neq F(j)$. On peut supposer, sans perte de généralité, que $F(i) < F(j)$.

Alors

$$\begin{aligned} \sigma_F(i) &= \#\{\ell \in \{1, \dots, k\} \mid F(\ell) < F(i)\} + \#\{\ell \in \{1, \dots, i\} \mid F(\ell) = F(i)\} \\ &\leq \#\{\ell \in \{1, \dots, k\} \mid F(\ell) < F(i)\} + \#\{\ell \in \{1, \dots, k\} \mid F(\ell) = F(i)\} \\ &\leq \#\{\ell \in \{1, \dots, k\} \mid F(\ell) \leq F(i)\} \\ &< \#\{\ell \in \{1, \dots, k\} \mid F(\ell) < F(j)\} + 1 \\ &\leq \sigma_F(j). \end{aligned}$$

- Supposons maintenant que $F(i) = F(j)$. On peut supposer par exemple que $i < j$.

Alors

$$\begin{aligned} \sigma_F(i) &= \#\{\ell \in \{1, \dots, k\} \mid F(\ell) < F(i)\} + \#\{\ell \in \{1, \dots, i\} \mid F(\ell) = F(i)\} \\ &= \#\{\ell \in \{1, \dots, k\} \mid F(\ell) < F(j)\} + \#\{\ell \in \{1, \dots, i\} \mid F(\ell) = F(j)\} \\ &< \#\{\ell \in \{1, \dots, k\} \mid F(\ell) < F(j)\} + \#\{\ell \in \{1, \dots, j\} \mid F(\ell) = F(j)\} \\ &= \sigma_F(j). \end{aligned}$$

On a donc démontré que dans les deux cas, $\sigma_F(i) \neq \sigma_F(j)$. ■

Remarque : On a l'égalité suivante : pour tout j , $f_{\sigma_F(j)} = F(j)$.

Cela permet de définir le simplexe V^F suivant :

$$V^F = V_0^F + \frac{1}{d}V^{\sigma_F} = \left[V_0^F, V_0^F + \frac{e_{\sigma_F(1)}}{d}, \dots, V_0^F + \frac{e_{\sigma_F(1)}}{d} + \dots + \frac{e_{\sigma_F(k)}}{d} \right].$$

Remarque : Tout les sommets du simplexe V^F sont des points de la grille de Gréville de degré d associée à V .

Remarque : Si λ_j^F désigne le vecteur des coordonnées barycentriques de V_j^F par rapport à V , alors :

$$\begin{aligned} d\lambda_0^F &= (\dots, f_{\ell+1} - f_\ell, \dots), \quad \ell \in \{0, \dots, k\} \\ d\lambda_j^F &= d\lambda_{j-1}^F + e_{\sigma_F(j)} - e_{\sigma_F(j)-1}, \end{aligned}$$

où (e_0, e_1, \dots, e_k) désigne la base canonique de \mathbb{R}^{k+1} .

Si l'on pose, par convention, $\sigma_F(k+1) = 0$, $e_{-1} = e_k$ et $d\lambda_{k+1}^F = d\lambda_0^F$, alors on a la relation de cyclicité :

$$d\lambda_0^F = d\lambda_{k+1}^F = d\lambda_k^F + e_0 - e_k = d\lambda_k^F + e_{\sigma_F(k+1)} - e_{\sigma_F(k+1)-1}.$$

On en déduit alors le

Lemme 2.11. *Pour toute application $F \in \{1, \dots, d\}^{\{1, \dots, k\}}$, on a $V^F \subset V$.*

Preuve :

Il suffit de montrer que les sommets de V^F sont dans V , ce qui revient à dire que leurs coordonnées barycentriques λ_j^F sont positives.

Si $j = 0$, c'est évident par définition de V_0^F .

Supposons le résultat établi jusqu'au rang $j - 1$, $j \geq 1$, et montrons que le vecteur $d\lambda_j^F$ est à coordonnées positives.

Puisque $d\lambda_j^F = d\lambda_{j-1}^F + e_{\sigma_F(j)} - e_{\sigma_F(j)-1}$ et que, par hypothèse de récurrence, $d\lambda_{j-1}^F$ est à coordonnées positives, il suffit de montrer que :

- soit $(d\lambda_0^F)_{\sigma_F(j)-1} \geq 1$,
- soit $(d\lambda_0^F)_{\sigma_F(j)-1} = 0$ et on a déjà ajouté le vecteur $e_{\sigma_F(j)-1}$ à une étape $m < j$.

Dans le second cas, on a alors $f_{\sigma_F(j)} = f_{\sigma_F(j)-1} = F(j)$.

Soit $m = \sigma_F^{-1}(\sigma_F(j) - 1)$. On a alors $F(m) = f_{\sigma_F(m)} = f_{\sigma_F(j)-1} = f_{\sigma_F(j)} = F(j)$, d'où l'on déduit immédiatement :

$$\begin{aligned} \sigma_F(m) &= \#\{\ell \in \{1, \dots, k\} \mid F(\ell) < F(m)\} + \#\{\ell \in \{1, \dots, m\} \mid F(\ell) = F(m)\} \\ &= \#\{\ell \in \{1, \dots, k\} \mid F(\ell) < F(j)\} + \#\{\ell \in \{1, \dots, m\} \mid F(\ell) = F(j)\}. \end{aligned}$$

D'autre part, par définition, on a :

$$\sigma_F(j) = \#\{\ell \in \{1, \dots, k\} \mid F(\ell) < F(j)\} + \#\{\ell \in \{1, \dots, j\} \mid F(\ell) = F(j)\}.$$

Comme $\sigma_F(m) = \sigma_F(j) - 1 < \sigma_F(j)$, on a donc $m < j$, ce que l'on voulait démontrer. ■

On a en fait le résultat suivant :

Théorème 2.12. *La collection $(V^F)_{F \in \{1, \dots, d\}^{\{1, \dots, k\}}}$ est une triangulation de V .*

Preuve :

- Montrons que $V \subset \cup V^F$.

Soit $x \in \overset{\circ}{V}$, où $\overset{\circ}{V}$ désigne l'intérieur de V .

Il existe un point de la grille de Gréville N tel que $\forall i, N_i \leq x_i < N_i + 1/d$. Soit σ_F une permutation telle que $0 \leq (N - x)_{\sigma_F(k)} \leq \dots \leq (N - x)_{\sigma_F(1)} \leq 1$. La permutation σ_F et les coordonnées barycentriques de N permettent de construire une application $F \in \{1, \dots, d\}^{\{1, \dots, k\}}$ telle que $N = V_0^F$ et $x \in V^F$.

Ainsi, $\overset{\circ}{V} \subset \cup V^F$, et puisque $\cup V^F$ est fermée, l'adhérence de $\overset{\circ}{V}$, qui est exactement V , aussi.

- D'après le lemme précédent, $\cup V^F \subset V$, donc $V = \cup V^F$.
- Les simplexes V^F étant de la forme $V_0^F + \frac{1}{d}V^{\sigma_F}$, le fait que $\cup V^F$ soit une triangulation découle immédiatement de la proposition 2.9. ■

2.4.2 Cas général

Le cas général d'un simplexe non dégénéré $V = [V_0, \dots, V_k] \subset \mathbb{R}^k$ s'obtient alors de la manière suivante :

- on considère un entier $d \geq 1$ et une application $F \in \{1, \dots, d\}^{\{1, \dots, k\}}$,
- on construit les points V_j^F ($0 \leq j \leq k$) de coordonnées barycentriques λ_j^F données par :

$$\begin{aligned} d\lambda_0^F &= (\dots, f_{\ell+1} - f_\ell, \dots), \quad \ell \in \{0, \dots, k\} \\ d\lambda_j^F &= d\lambda_{j-1}^F + e_{\sigma_F(j)} - e_{\sigma_F(j)-1}, \end{aligned}$$

- on définit le simplexe V^F comme l'enveloppe convexe des V_j^F :

$$V^F = [V_0^F, \dots, V_k^F].$$

On obtient alors facilement le

Théorème 2.13. *La collection $(V^F)_{F \in \{1, \dots, d\}^{\{1, \dots, k\}}}$ est une triangulation de V .*

Preuve :

Il suffit de considérer la transformation affine (bijective) envoyant :

- $\vec{0}$ sur V_0 ,
- les points $e_1 + \dots + e_j$ sur les sommets V_j ($1 \leq j \leq k$).

On conclut en remarquant que les coordonnées barycentriques sont conservées par transformation affine, et que l'image d'une triangulation par une telle transformation est une triangulation. ■

2.5 Quelques propriétés de la triangulation standard

2.5.1 Restriction aux faces

La triangulation standard est bien définie sur chaque face engendrée par des sommets consécutifs :

Proposition 2.14. *Soit $V = [V_0, \dots, V_k]$ un simplexe non dégénéré de \mathbb{R}^k , et V' une face $[V_0, \dots, V_r]$ (avec $1 \leq r \leq k$).*

Alors $T_d(V)$ définit en restriction à V' la même triangulation que $T_d(V')$.

Preuve :

Il suffit de montrer le résultat pour $r = k - 1$.

On a donc les simplexes $V = [V_0, \dots, V_k]$ et $V' = [V_0, \dots, V_{k-1}]$.

Puisque V' est de dimension $k - 1$, les simplexes de $T_d(V) \cap V'$ sont des simplexes de la forme $[V_0^F, \dots, V_{k-1}^F]$, provenant de simplexes $V^F = [V_0^F, \dots, V_k^F] \in T_d(V)$ et où les sommets V_i^F vérifient :

$$\forall i \in \{0, \dots, k - 1\}, \quad (d\lambda_i^F)_k = 0.$$

En enlevant la dernière composante nulle, les coordonnées barycentriques des sommets V_0^F, \dots, V_{k-1}^F vérifient donc les identités définissant les simplexes de $T_d(V')$ (avec k remplacé par $k - 1$). ■

Remarque : Puisque $T_d(V)$ est invariant par permutation cyclique des sommets V_0, \dots, V_k , on peut remplacer V' dans la proposition précédente par toute face engendrée par des sommets (cycliquement) consécutifs.

2.5.2 Sous-triangulations

La triangulation standard se comporte également bien relativement aux sous-triangulations, dans le sens suivant :

Proposition 2.15. *Soient $d, \ell \geq 2$ deux entiers, $V = [V_0, \dots, V_k]$ un simplexe non dégénéré de \mathbb{R}^k et $V^F \in T_d(V)$.*

Alors $T_\ell(V^F) = T_{d\ell}(V) \cap V^F$.

Preuve :

• Montrons tout d'abord que les simplexes de $T_\ell(V^F)$ sont des éléments de $T_{d\ell}(V) \cap V^F$.

Soit donc $V^G \in T_\ell(V^F)$. On note σ_F la permutation associée à F , et σ_G celle associée à G .

Les coordonnées barycentriques associées à V des sommets V_j^F de V^F vérifient :

$$\begin{aligned} d\lambda_0^F &= (\dots, f_{i+1} - f_i, \dots), \quad i \in \{0, \dots, k\} \\ d\lambda_j^F &= d\lambda_{j-1}^F + e_{\sigma_F(j)} - e_{\sigma_F(j)-1}. \end{aligned}$$

De même, les coordonnées barycentriques associées à V^F des sommets V_ℓ^G de V^G vérifient :

$$\ell\lambda_0^G = (\dots, g_{i+1} - g_i, \dots), \quad i \in \{0, \dots, k\}$$

$$\ell\lambda_i^G = d\lambda_{i-1}^G + e_{\sigma_G(i)} - e_{\sigma_G(i)-1}.$$

On définit, pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$, les vecteurs λ_i^H de la manière suivante :

$$d\ell\lambda_i^H = \sum_{j=0}^k (\ell\lambda_i^G)_j [d\lambda_j^F].$$

En particulier,

$$d\ell\lambda_0^H = \sum_{j=0}^k \ell(g_{j+1} - g_j) [d\lambda_j^F].$$

Les vecteurs λ_i^H ainsi définis sont à coordonnées positives, et de plus :

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^k (\lambda_0^H)_m &= \sum_{m=0}^k \sum_{j=0}^k \ell(g_{j+1} - g_j) [d\lambda_j^F]_m \\ &= \sum_{j=0}^k (g_{j+1} - g_j) \underbrace{\sum_{m=0}^k [d\lambda_j^F]_m}_{=d} \\ &= d \sum_{j=0}^k (g_{j+1} - g_j) \\ &= d\ell. \end{aligned}$$

Par conséquent, $d\ell\lambda_0^H$ est un vecteur à coordonnées entières positives, dont la somme vaut $d\ell$.

En outre, on a également :

$$\begin{aligned} d\ell\lambda_i^H &= \sum_{j=0}^k (\ell\lambda_i^G)_j [d\lambda_j^F] \\ &= \sum_{j=0}^k (\ell\lambda_{i-1}^G + e_{\sigma_G(i)} - e_{\sigma_G(i)-1})_j [d\lambda_j^F] \\ &= \sum_{j=0}^k (\ell\lambda_{i-1}^G)_j [d\lambda_j^F] + d\lambda_{\sigma_G(i)}^F - d\lambda_{\sigma_G(i)-1}^F \\ &= \sum_{j=0}^k (\ell\lambda_{i-1}^G)_j [d\lambda_j^F] + e_{\sigma_F(\sigma_G(i))} - e_{\sigma_F(\sigma_G(i))-1} \\ &= d\ell\lambda_{i-1}^H + e_{\sigma_H(i)} - e_{\sigma_H(i)-1}, \end{aligned}$$

où l'on a noté $\sigma_H = \sigma_F \circ \sigma_G \in \mathcal{S}_k$.

Par conséquent, on a bien démontré que $V^G \subset T_{d\ell}(V)$. Il est par ailleurs évident que $V^G \subset V^F$, et on a donc bien $V^G \subset T_{d\ell}(V) \cap V^F$.

• D'autre part, il y a $d^k \ell^k$ simplexes dans la triangulation $T_{d\ell}(V)$, et d^k simplexes V^F dans $T_d(V)$. Par ailleurs, $T_\ell(V^F)$ contient exactement ℓ^k simplexes, tous contenus dans $T_{d\ell}(V) \cap V^F$ d'après ce qui précède.

On a donc bien $T_{d\ell}(V) \cap V^F = T_\ell(V^F)$. ■

2.5.3 Adjacences

Considérons deux simplexes V^F et V^G de $T_d(V)$ s'intersectant le long d'une face de dimension $k-1$. Plusieurs cas se présentent :

1. Il existe un indice $1 \leq p \leq k-1$ tel que

$$V^F = [V_0, \dots, V_{p-1}, V_p^F, V_{p+1}, \dots, V_k]$$

et

$$V^G = [V_0, \dots, V_{p-1}, V_p^G, V_{p+1}, \dots, V_k].$$

Alors

$$\begin{aligned} d\lambda_{p+1} &= d\lambda_p^F + e_{\sigma_F(p+1)} - e_{\sigma_F(p+1)-1} \\ &= d\lambda_{p-1} + e_{\sigma_F(p)} - e_{\sigma_F(p)-1} + e_{\sigma_F(p+1)} - e_{\sigma_F(p+1)-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d\lambda_{p+1} &= d\lambda_p^G + e_{\sigma_G(p+1)} - e_{\sigma_G(p+1)-1} \\ &= d\lambda_{p-1} + e_{\sigma_G(p)} - e_{\sigma_G(p)-1} + e_{\sigma_G(p+1)} - e_{\sigma_G(p+1)-1}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \sigma_F(p) &= \sigma_G(p+1) \\ \sigma_F(p+1) &= \sigma_G(p) \\ \sigma_F(\ell) &= \sigma_G(\ell) \text{ sinon.} \end{aligned}$$

2. V^F et V^G sont de la forme

$$\begin{aligned} V^F &= [V_0^F, V_1, \dots, V_k] \\ V^G &= [V_1, \dots, V_k, V_0^G]. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \sigma_F(1) &= \sigma_G(k) \\ \sigma_F(\ell+1) &= \sigma_G(\ell) \text{ sinon.} \end{aligned}$$

3. V^F et V^G sont de la forme

$$\begin{aligned} V^F &= [V_0, \dots, V_{k-1}, V_k^F] \\ V^G &= [V_k^G, V_1, \dots, V_{k-1}]. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \sigma_F(k) &= \sigma_G(1) \\ \sigma_F(\ell) &= \sigma_G(\ell+1) \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Dans les trois cas, on a :

$$\frac{V_{p-1} + V_{p+1}}{2} = \frac{V_p^F + V_p^G}{2}$$

où par convention $V_{-1} = V_k$ et $V_{k+1} = V_0$.

2.5.4 Calcul de la grille de contrôle de la triangulation standard de degré 2

Dans cette partie, on considère un polynôme $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ de degré d sur un simplexe V de \mathbb{R}^k . Il s'agit de calculer les coefficients de Bernstein de f de degré d sur chacun des sous-simplexes obtenus dans la triangulation standard de V de degré 2.

On considère la base canonique (e_0, \dots, e_k) de \mathbb{R}^{k+1} . On définit en outre les opérateurs E_j ($0 \leq j \leq k$) agissant sur les coefficients de Bernstein de la façon suivante :

$$\forall |\alpha| = d, \quad E_j b_\alpha := b_{\alpha+e_j}.$$

Soit $V^* = [V_0^*, \dots, V_k^*]$ un simplexe non dégénéré dont les coordonnées barycentriques associées à V des sommets sont $(v_{i0}^*, \dots, v_{i,k}^*)$.

On a alors le résultat suivant ([GP]), dérivé de l'algorithme de De Casteljaou :

Théorème 2.16. *Soit f un polynôme de degré d . On a :*

$$\forall |\alpha| = d, \quad b_\alpha(f, d, V^*) = \prod_{i=0}^k \left(\sum_{j=0}^k v_{ij}^* E_j \right)^{\alpha_i} b_{(0, \dots, 0)}(f, d, V).$$

Preuve :

On procède à une reparamétrisation du simplexe V en V^* .

D'après l'algorithme de De Casteljaou, les coefficients de Bernstein de f sur le simplexe $[V_0^*, V_1, \dots, V_k]$ sont les coefficients

$$\left(\sum_{j=0}^k \lambda_j(V_0^*) E_j \right)^{\alpha_0} b_{(0, \alpha_1, \dots, \alpha_k)}(f, d, V),$$

où les λ_j désignent les coordonnées barycentriques associées à V .

On obtient ensuite successivement les coefficients de Bernstein de f sur les simplexes $[V_0^*, \dots, V_i^*, V_{i+1}, \dots, V_k]$ ($i \in \{1, \dots, k\}$) de la même manière ; ce sont les coefficients

$$\left(\sum_{j=0}^k \lambda_j(V_0^*) E_j \right)^{\alpha_0} \dots \left(\sum_{j=0}^k \lambda_j(V_i^*) E_j \right)^{\alpha_i} b_{(0, \dots, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_k)}(f, d, V).$$

On obtient finalement les coefficients de Bernstein de f sur V^* ; ce sont les coefficients

$$\left(\sum_{j=0}^k \lambda_j(V_0^*) E_j \right)^{\alpha_0} \dots \left(\sum_{j=0}^k \lambda_j(V_k^*) E_j \right)^{\alpha_k} b_{(0, \dots, 0)}(f, d, V),$$

comme annoncé. ■

Grâce à ce théorème, on peut obtenir les coefficients de Bernstein d'un polynôme sur les sous-simplexes obtenus par triangulation standard de degré 2 de V .

Remarque : Soit $U = [U_0, \dots, U_k]$ un simplexe de la triangulation standard $T_2(V)$ de degré 2 de V .

D'après la remarque 2.4.1, chaque sommet U_ℓ est un point de la grille de Gréville de degré 2 associée à V , et par conséquent est le milieu de deux sommets V_{i_ℓ} et V_{j_ℓ} de V (éventuellement confondus) :

$$U_\ell = \frac{V_{i_\ell} + V_{j_\ell}}{2}.$$

Corollaire 2.17.

Soit $U = [U_0, \dots, U_k]$ un simplexe de la triangulation standard $T_2(V)$ de degré 2 de V .

Pour chaque sommet U_ℓ de U , on considère les sommets V_{i_ℓ} et V_{j_ℓ} de V tels que

$$U_\ell = \frac{V_{i_\ell} + V_{j_\ell}}{2}.$$

Les coefficients de Bernstein de f associés au simplexe U sont alors donnés par :

$$\forall |\gamma| = d, \quad b_\gamma(f, d, U) = \frac{1}{2^d} \prod_{\ell=0}^k (E_{i_\ell} + E_{j_\ell})^{\gamma_\ell} b_{\vec{0}}(f, d, V).$$

Exemple 2.18. On se place en dimension 3. Soit V un simplexe non dégénéré de \mathbb{R}^3 .

On considère le simplexe $U \in T_2(V)$ dont les sommets sont

$$U_0 = V_0, \quad U_1 = \frac{V_0 + V_1}{2}, \quad U_2 = \frac{V_0 + V_2}{2}, \quad U_3 = \frac{V_0 + V_3}{2}.$$

Soit $f \in \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$ un polynôme de degré 4.

On souhaite calculer le coefficient de Bernstein $b_{(2,1,1,0)}(f, d, U)$. On a alors :

$$\begin{aligned} & b_{(2,1,1,0)}(f, 4, V) \\ &= \frac{1}{16} \left[(E_0 + E_0)^2 (E_0 + E_1) (E_0 + E_2) \right] b_0(f, 4, V) \\ &= \frac{1}{16} \left[(E_0 + E_0)^2 (E_0 + E_1) \right] [b_{e_0}(f, 4, V) + b_{e_2}(f, 4, V)] \\ &= \frac{1}{16} \left[(E_0 + E_0)^2 \right] [b_{2e_0}(f, 4, V) + b_{e_0+e_2}(f, 4, V) + b_{e_0+e_1}(f, 4, V) + b_{e_1+e_2}(f, 4, V)] \\ &= \frac{1}{4} [b_{4e_0}(f, 4, V) + b_{3e_0+e_2}(f, 4, V) + b_{3e_0+e_1}(f, 4, V) + b_{2e_0+e_1+e_2}(f, 4, V)] \\ &= \frac{1}{4} [b_{(4,0,0,0)}(f, 4, V) + b_{(3,0,1,0)}(f, 4, V) + b_{(3,1,0,0)}(f, 4, V) + b_{(2,1,1,0)}(f, 4, V)]. \end{aligned}$$

Le corollaire précédent donne une formule permettant de calculer, connaissant la grille de contrôle d'un polynôme f sur le simplexe V , la grille de contrôle sur chacun des simplexes de la triangulation standard de V de degré 2.

D'après le proposition 2.15, la triangulation standard $T_{2^{N+1}}(V)$ de degré 2^{N+1} est obtenue en calculant la triangulation standard de degré 2 de $T_{2^N}(V)$.

On peut donc calculer les coefficients de Bernstein d'un polynôme f sur chaque simplexe de la triangulation standard $T_{2^N}(V)$ en effectuant N triangulations standard de degré 2 successives.

2.6 Polytope de contrôle

Soit $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ un polynôme de degré d , et $V = [V_0, \dots, V_k]$ un simplexe non dégénéré de \mathbb{R}^k . On considère la base de Bernstein $(B_\alpha^d)_{|\alpha|=d}$ associée et la liste $(b_\alpha)_{|\alpha|=d}$ des coefficients de Bernstein de f sur V :

$$f = \sum_{|\alpha|=d} b_\alpha B_\alpha^d.$$

On considère l'unique fonction \hat{f} continue, affine sur chaque simplexe de la triangulation standard $T_d(V)$ et vérifiant la propriété d'interpolation :

$$\forall |\alpha| = d, \hat{f}(N_\alpha) = b_\alpha,$$

où les points N_α sont les points de la grille de Gréville de degré d associée à V .

On appelle cette fonction polytope de contrôle standard de f de degré d sur V ou simplement, quand le contexte est explicite, polytope de contrôle de f .

Remarque : Par abus de langage, on appellera également polytope de contrôle le graphe de cette fonction.

2.7 Convexité

2.7.1 Polytope de contrôle

Le but de cette partie est de donner une caractérisation en termes de coefficients de Bernstein de la convexité du polytope de contrôle d'un polynôme f .

Pour cela, on introduit d'abord la notion de différences secondes.

Définition 2.19.

Soit $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ un polynôme de degré $d \geq 2$, et $V = [V_0, \dots, V_k]$ un simplexe non dégénéré de \mathbb{R}^k .

On considère la base de Bernstein $(B_\alpha^d)_{|\alpha|=d}$ associée et la liste $(b_\alpha)_{|\alpha|=d}$ des coefficients de Bernstein de f sur V :

$$f = \sum_{|\alpha|=d} b_\alpha B_\alpha^d.$$

On note également (e_0, \dots, e_k) la base canonique de \mathbb{R}^{k+1} , avec la convention $e_{-1} = e_k$.

On appelle différences secondes, et on note $\Delta^2 b_{\gamma,i,j}(f, d, V)$, les quantités

$$b_{\gamma+e_i+e_{j-1}} + b_{\gamma+e_{i-1}+e_j} - b_{\gamma+e_{i-1}+e_{j-1}} - b_{\gamma+e_i+e_j},$$

où $|\gamma| = d - 2$ et $0 \leq i < j \leq k$.

On note $\Delta^2 b(f, d, V)$ le vecteur des différences secondes :

$$\Delta^2 b(f, d, V) = (\Delta^2 b_{\gamma,i,j}(f, d, V))_{\substack{|\gamma|=d-2 \\ 0 \leq i < j \leq k}}.$$

Exemple 2.20. Soit $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ un polynôme affine (ie de degré ≤ 1) défini sur un simplexe V , et $\bar{f} \in \mathbb{R}[X_0, \dots, X_k]$ défini par

$$\bar{f}(X_0, \dots, X_k) = f(X_1, \dots, X_k).$$

Alors pour tout $d \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} \Delta^2 b_{\gamma, i, j}(f, d, V) &= b_{\gamma+e_i+e_{j-1}} + b_{\gamma+e_{i-1}+e_j} - b_{\gamma+e_{i-1}+e_{j-1}} - b_{\gamma+e_i+e_j} \\ &= \bar{f}(\gamma + e_i + e_{j-1}) + \bar{f}(\gamma + e_{i-1} + e_j) \\ &\quad - \bar{f}(\gamma + e_{i-1} + e_{j-1}) - \bar{f}(\gamma + e_i + e_j) \\ &= 0 \text{ car } \bar{f} \text{ est affine,} \end{aligned}$$

la deuxième égalité étant une conséquence de la propriété 1.1 de précision affine. Ce résultat est indépendant du choix de V .

Exemple 2.21. Soit $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ une forme quadratique définie sur le simplexe standard Δ , et $\bar{f} \in \mathbb{R}[X_0, \dots, X_k]$ défini par

$$\bar{f}(X_0, \dots, X_k) = f(X_1, \dots, X_k).$$

On considère la matrice $M \in S_{k+1}(\mathbb{R})$ de la forme quadratique \bar{f} , où l'on numérote les lignes et les colonnes à partir de 0.

D'après le calcul fait dans l'exemple 1.13, f , vu en degré $d \geq 2$, a pour coefficients de Bernstein :

$$\forall |\alpha| = d, b_\alpha := b_\alpha(f, d, \Delta) = \frac{1}{d(d-1)} \left[\bar{f}(\alpha_0, \dots, \alpha_k) - \sum_{l=0}^k m_{ll} \alpha_l \right].$$

Soient maintenant $0 \leq i < j \leq k$ et $\gamma \in \mathbb{N}^{k+1}$ tel que $|\gamma| = d - 2$. On a alors :

$$\begin{aligned} d(d-1)b_{\gamma+e_i+e_j} &= \bar{f}(\gamma + e_i + e_j) - \sum_{l=0}^k m_{ll} \gamma_l - m_{ii} - m_{jj} \\ &= \bar{f}(\gamma) + \bar{f}(e_i) + \bar{f}(e_j) + 2\bar{p}_f(\gamma, e_i) + 2\bar{p}_f(\gamma, e_j) + 2\bar{p}_f(e_i, e_j) \\ &= \bar{f}(\gamma) + \bar{f}(e_i) + \bar{f}(e_j) + 2\bar{p}_f(\gamma, e_i) + 2\bar{p}_f(\gamma, e_j) + 2m_{i,j} \end{aligned}$$

où l'on a noté \bar{p}_f la forme polaire associée à \bar{f} .

On obtient donc finalement :

$$\Delta^2 b_{\gamma, i, j}(f, d, \Delta) = \frac{2}{d(d-1)} (m_{i-1, j} + m_{i, j-1} - m_{i, j} - m_{i-1, j-1}),$$

avec la convention $m_{-1, j} = m_{k, j}$ et $m_{-1, -1} = m_{kk}$.

Remarque : Les différences secondes d'une forme quadratique exprimé dans la base de Bernstein de degré $d \geq 2$ quelconque ne dépendent pas de γ .

Remarque : Puisque les différences secondes d'un polynôme affine sont nulles, on a ici calculé les différences secondes de tout polynôme de degré 2.

Exemple 2.22. Soit $d \geq 2$. Il existe un polynôme $q_d \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ de degré 2 vérifiant

$$\Delta^2 b(q_d, d, \Delta) = (1, \dots, 1).$$

Soit en effet $M \in S_{k+1}(\mathbb{R})$ la matrice symétrique définie par $M_{ij} = i(k - j + 1)$ pour $0 \leq i \leq j$ (on numérote les lignes et les colonnes à partir de 0), q la forme quadratique associée, et

$$q_d = \frac{d(d-1)}{2} q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k].$$

Un calcul immédiat montre qu'avec la convention $M_{-1,j} = M_{k,j}$ et $M_{-1,-1} = M_{kk}$, on a

$$\Delta^2 b(q_d, d, \Delta) = (1, \dots, 1).$$

On montre facilement qu'il s'agit de la seule forme quadratique vérifiant cette propriété, puisque les relations

$$\frac{2}{d(d-1)} (m_{i-1,j} + m_{i,j-1} - m_{i,j} - m_{i-1,j-1}) = 1$$

et

$$\forall i, j, \quad M_{0,j} = M_{i,0} = 0$$

permettent de calculer par remontées successives tous les coefficients de M .

Les différences secondes s'interprètent également, à l'aide de la proposition 1.16, en termes de dérivées secondes :

Proposition 2.23. Les dérivées secondes directionnelles $D_{V_j - V_{j-1}} D_{V_i - V_{i-1}} f$ ont pour coefficients de Bernstein :

$$\forall |\gamma| = d - 2, \quad b_\gamma (D_{V_j - V_{j-1}} D_{V_i - V_{i-1}} f, d - 2, V) = -d(d-1) \Delta^2 b_{\gamma, i, j}(f, d, V).$$

Remarque : On retrouve le fait que les différences secondes d'un polynôme de degré 2 ne dépendent pas de γ .

Il est également clair que si le vecteur des différences secondes $\Delta^2 b(f, d, V)$ est nul, alors f est de degré 1.

On peut à présent énoncer le théorème suivant, dû à Goodman et Peters ([GP], théorème 3.1), qui caractérise la convexité du polytope de contrôle en termes de coefficients de Bernstein :

Théorème 2.24. Soit (e_0, \dots, e_k) la base canonique de \mathbb{R}^{k+1} , et posons $e_{-1} := e_k$.

Les conditions suivantes sont alors équivalentes :

(i) Le polytope de contrôle \hat{f} est convexe.

(ii) $\forall |\gamma| = d - 2, \forall 0 \leq i < j \leq k,$

$$b_{\gamma + e_i + e_{j-1}} + b_{\gamma + e_{i-1} + e_j} - b_{\gamma + e_{i-1} + e_{j-1}} - b_{\gamma + e_i + e_j} \geq 0.$$

(iii) Les coefficients de Bernstein $b_\gamma (D_{V_j - V_{j-1}} D_{V_i - V_{i-1}} f, d - 2, V)$ sont tous négatifs pour tout $0 \leq i < j \leq k$.

La preuve du théorème s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme 2.25. Soit V^F et V^G deux simplexes de $T_d(V)$ s'intersectant le long d'une face de dimension $k - 1$.

Alors \hat{f} est convexe sur $V^F \cup V^G$ si et seulement si

$$\hat{f}(V_p^F) + \hat{f}(V_p^G) - 2\hat{f}\left(\frac{V_{p-1} + V_{p+1}}{2}\right) \geq 0.$$

Preuve (lemme) On reprend les notations de la partie 2.5.3 : il existe des sommets $V_p^F \in V^F$, $V_p^G \in V^G$ et $V_{p-1}, V_{p+1} \in V^F \cap V^G$, avec la convention $V_{-1} = V_k$ et $V_{k+1} = V_0$ et vérifiant $\frac{V_{p-1} + V_{p+1}}{2} = \frac{V_p^F + V_p^G}{2}$.

\hat{f} est convexe sur $V^F \cup V^G$ si et seulement si

$$\forall x, y \in V^F \cup V^G, \quad 2\hat{f}\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \hat{f}(x) + \hat{f}(y),$$

soit si et seulement si

$$\forall x \in V^F, \forall y \in V^G, \quad 2\hat{f}\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \hat{f}(x) + \hat{f}(y),$$

puisque \hat{f} est affine sur V^F et sur V^G .

Soit donc $x = \sum_{i \neq p} \lambda_i V_i + \lambda_p V_p^F \in V^F$ et $y = \sum_{i \neq p} \mu_i V_i + \mu_p V_p^G \in V^G$, avec par exemple $0 < \mu_p \leq \lambda_p$.

D'une part,

$$\hat{f}(x) + \hat{f}(y) = \sum_{i \neq p} (\lambda_i + \mu_i) \hat{f}(V_i) + \lambda_p \hat{f}(V_p^F) + \mu_p \hat{f}(V_p^G).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} 2\hat{f}\left(\frac{x+y}{2}\right) &= 2\hat{f}\left(\sum_{i \neq p} \frac{(\lambda_i + \mu_i)}{2} V_i + \frac{\lambda_p}{2} V_p^F + \frac{\mu_p}{2} V_p^G\right) \\ &= 2\hat{f}\left(\sum_{i \neq p} \frac{(\lambda_i + \mu_i)}{2} V_i + \frac{\lambda_p - \mu_p}{2} V_p^F + \mu_p \frac{V_p^G + V_p^F}{2}\right) \\ &= 2\hat{f}\left(\sum_{i \neq p} \frac{(\lambda_i + \mu_i)}{2} V_i + \frac{\lambda_p - \mu_p}{2} V_p^F + \mu_p \frac{V_{p-1} + V_{p+1}}{2}\right). \end{aligned}$$

$\sum_{i \neq p} \frac{(\lambda_i + \mu_i)}{2} V_i + \frac{\lambda_p - \mu_p}{2} V_p^F + \mu_p \frac{V_{p-1} + V_{p+1}}{2}$ étant une combinaison convexe d'éléments de V^F et \hat{f} étant affine sur V^F , on a donc :

$$2\hat{f}\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sum_{i \neq p} (\lambda_i + \mu_i) \hat{f}(V_i) + (\lambda_p - \mu_p) \hat{f}(V_p^F) + 2\mu_p \hat{f}\left(\frac{V_{p-1} + V_{p+1}}{2}\right),$$

et donc

$$\hat{f}(x) + \hat{f}(y) - 2\hat{f}\left(\frac{x+y}{2}\right) = \mu_p \left[\hat{f}(V_p^F) + \hat{f}(V_p^G) - 2\hat{f}\left(\frac{V_{p-1} + V_{p+1}}{2}\right) \right].$$

Le cas $0 < \lambda_p \leq \mu_p$ est analogue.

Ainsi, \hat{f} est convexe sur $V^F \cup V^G$ si et seulement si

$$\hat{f}(V_p^F) + \hat{f}(V_p^G) - 2\hat{f}\left(\frac{V_{p-1} + V_{p+1}}{2}\right) \geq 0,$$

comme annoncé. ■

Preuve (théorème)

• (ii) et (iii) est claire à la vue de la proposition 2.23.

• Montrons l'équivalence entre (i) et (ii).

◦ \hat{f} est convexe sur V si et seulement si pour toute droite L , la fonction affine par morceaux $\hat{f}|_{L \cap V}$ est convexe. Par continuité, il suffit de considérer les droites L telles que pour tout $V^F \in T_d(V)$, $L \cap V^F$ ne soit pas contenue dans une face de dimension inférieure de V^F et telles que L ne rencontre aucun point de la grille de Gréville associée à V . Par conséquent, \hat{f} est convexe sur V si et seulement si \hat{f} est convexe en restriction à toute paire V^F et V^G de simplexes de $T_d(V)$ qui s'intersectent en une face de dimension $k - 1$.

◦ On montre maintenant l'implication (i) \Rightarrow (ii).

Soit donc $\gamma \in \mathbb{N}^{k+1}$ tel que $|\gamma| = d - 2$ et $0 \leq i < j \leq k$. Supposons tout d'abord $i \geq 1$. On va construire deux simplexes V^F et V^G s'intersectant en une face de dimension $k - 1$ et vérifiant :

1. les points de coordonnées barycentriques (associées à V) $\frac{\gamma + e_{i-1} + e_{j-1}}{d}$ et $\frac{\gamma + e_i + e_j}{d}$ sont dans $V^F \cap V^G$,
2. le point de coordonnées barycentriques $\frac{\gamma + e_i + e_{j-1}}{d}$ est dans V^F ,
3. le point de coordonnées barycentriques $\frac{\gamma + e_{i-1} + e_j}{d}$ est dans V^G .

On considère l'unique permutation σ_F de \mathcal{S}_k vérifiant :

$$\begin{aligned} \sigma_F(\ell) &= \ell \text{ pour } \ell \in \{1, \dots, i-1\} \\ \sigma_F(i) &= i \\ \sigma_F(i+1) &= j \\ \sigma_F(\ell+1) &> \sigma_F(\ell) \text{ pour } \ell \in \{i+2, \dots, k-1\}. \end{aligned}$$

On considère également les vecteurs $\lambda_{i-p}^F \in \mathbb{N}^{k+1}$ définis par

$$\begin{aligned} \forall p \in \{0, \dots, i\}, \quad d\lambda_{i-p}^F &= \gamma + e_{j-1} + e_{i-p} \\ \forall p \in \{1, \dots, k-i\}, \quad d\lambda_{i+p}^F &= \begin{cases} \gamma + e_j + e_{i+p-1} & \text{si } j \geq i+p \\ \gamma + e_{j-1} + e_{i+p} & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

En particulier,

$$\begin{aligned} d\lambda_{i-1}^F &= \gamma + e_{j-1} + e_{i-1} \\ d\lambda_i^F &= \gamma + e_{j-1} + e_i \\ d\lambda_{i+1}^F &= \gamma + e_j + e_i. \end{aligned}$$

Si $V^F = [V_0^F, \dots, V_k^F]$ est le simplexe dont les sommets V_ℓ^F ont pour coordonnées barycentriques λ_ℓ^F , on vérifie aisément que

$$\forall \ell \in \{1, \dots, k\}, \quad d\lambda_\ell^F = d\lambda_{\ell-1}^F + e_{\sigma_F(\ell)} - e_{\sigma_F(\ell)-1}.$$

Par conséquent, V^F est bien un simplexe de la triangulation standard $T_d(V)$. On construit de même un simplexe V^G , défini par la permutation σ_G caractérisée par

$$\sigma_G(\ell) = \ell \text{ pour } \ell \in \{1, \dots, i-1\}$$

$$\begin{aligned}\sigma_G(i) &= j \\ \sigma_G(i+1) &= i \\ \sigma_G(\ell+1) &> \sigma_G(\ell) \text{ pour } \ell \in \{i+2, \dots, k-1\},\end{aligned}$$

et vérifiant

$$\begin{aligned}d\lambda_{i-1}^G &= \gamma + e_{j-1} + e_{i-1} \\ d\lambda_i^G &= \gamma + e_j + e_{i-1} \\ d\lambda_{i+1}^G &= \gamma + e_j + e_i.\end{aligned}$$

On obtient ainsi les simplexes V^F et V^G recherchés.

Le cas $i = 0$ est similaire, en considérant les simplexes V^F et V^G donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_F(1) = j \\ \sigma_F(\ell+1) > \sigma_F(\ell) \text{ pour } 2 \leq \ell \leq k-1 \\ d\lambda_k^F = \gamma + e_{j-1} + e_k \\ d\lambda_0^F = \gamma + e_{j-1} + e_0 \\ d\lambda_1^F = \gamma + e_j + e_0 \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_G(k) = j \\ \sigma_G(\ell) = \sigma_F(\ell+1) \text{ pour } 1 \leq \ell \leq k-1 \\ d\lambda_{k-1}^G = \gamma + e_{j-1} + e_k \\ d\lambda_k^G = \gamma + e_j + e_k \\ d\lambda_0^G = \gamma + e_j + e_0. \end{array} \right.$$

Dans les deux cas, on a construit les simplexes V^F et V^G recherchés.

Soit $V_p^F \in V^F$ et $V_p^G \in V^G$ les points de coordonnées barycentriques

$$\frac{\gamma + e_i + e_{j-1}}{d}$$

et

$$\frac{\gamma + e_{i-1} + e_j}{d},$$

$V_{p-1} \in V^F \cap V^G$ celui de coordonnées barycentriques

$$\frac{\gamma + e_{i-1} + e_{j-1}}{d}$$

et $V_{p+1} \in V^F \cap V^G$ celui de coordonnées barycentriques

$$\frac{\gamma + e_i + e_j}{d}.$$

Puisque \hat{f} est convexe, en particulier sur $V^F \cup V^G$,

$$\hat{f}(V_p^F) + \hat{f}(V_p^G) - 2\hat{f}\left(\frac{V_{p-1} + V_{p+1}}{2}\right) \geq 0,$$

ce qui se traduit par l'inégalité (iii).

○ On montre maintenant l'implication (ii) \Rightarrow (i). Soit V^F et V^G deux simplexes de $T_d(V)$ s'intersectant en une face de dimension $k - 1$, et montrons que \hat{f} est convexe sur $V^F \cup V^G$. Cela montrera que \hat{f} est convexe sur V .

D'après le lemme précédent, il suffit de montrer que

$$\hat{f}(V_p^F) + \hat{f}(V_p^G) - 2\hat{f}\left(\frac{V_{p-1} + V_{p+1}}{2}\right) \geq 0.$$

Soit $\gamma \in \mathbb{N}^{k+1}$, $|\gamma| = d - 2$, et $0 \leq i < j \leq k$ tels que V_{p-1} soit de coordonnées barycentriques

$$\frac{\gamma + e_{i-1} + e_{j-1}}{d}.$$

Dans les trois cas étudiés au début de cette preuve, $V_p^F \in V^F$ et $V_p^G \in V^G$ sont les points de coordonnées barycentriques

$$\frac{\gamma + e_i + e_{j-1}}{d}$$

et

$$\frac{\gamma + e_{i-1} + e_j}{d}$$

et $V_{p+1} \in V^F \cap V^G$ celui de coordonnées barycentriques

$$\frac{\gamma + e_i + e_j}{d}.$$

L'inégalité (ii) se traduit alors immédiatement par

$$\hat{f}(V_p^F) + \hat{f}(V_p^G) - 2\hat{f}\left(\frac{V_{p-1} + V_{p+1}}{2}\right) \geq 0,$$

et donc \hat{f} est convexe sur $V^F \cup V^G$.

Finalement, \hat{f} est convexe sur V , CQFD. ■

2.7.2 Polytope de contrôle composé

On a défini dans la section 2.6 la notion de polytope de contrôle d'un f de degré d sur un simplexe V .

Subdivisons V à l'aide de la triangulation standard de degré ℓ . On peut alors définir la fonction \hat{f}_ℓ par morceaux, égale sur chaque simplexe U de $T_\ell(V)$ au polytope de contrôle de f sur U . La proposition 2.15 implique alors que \hat{f}_ℓ est continue, et affine sur chaque simplexe de $T_{d\ell}(V)$.

On appelle cette fonction polytope de contrôle composé de f associé à $T_\ell(V)$.

On a alors le

Théorème 2.26. *Si le polytope de contrôle de f sur V est convexe, alors pour tout $\ell \geq 2$, le polytope de contrôle composé de f associé à $T_\ell(V)$ est convexe.*

Preuve :

On suppose que le polytope de contrôle de f sur V est convexe.

Soit $U = [U_0, \dots, U_k]$ un simplexe de la triangulation standard $T_\ell(V)$. D'après le théorème 2.24, les coefficients de Bernstein $b_\gamma(D_{V_j-V_{j-1}}D_{V_i-V_{i-1}}f, d-2, V)$ sont tous négatifs pour tout $0 \leq i < j \leq k$.

D'après l'algorithme de De Casteljau, les coefficients de Bernstein $b_\gamma(D_{V_j-V_{j-1}}D_{V_i-V_{i-1}}f, d-2, U)$ sont des combinaisons convexes de nombres négatifs, donc sont également négatifs.

Par construction de la triangulation standard $T_\ell(V)$, il existe une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_k$ telle que

$$\forall j, \quad U_j - U_{j-1} = \frac{V_{\sigma(j)} - V_{\sigma(j)-1}}{\ell},$$

avec la convention $U_{-1} = U_k$.

Les coefficients de Bernstein $b_\gamma(D_{U_j-U_{j-1}}D_{U_i-U_{i-1}}f, d-2, U)$ sont donc négatifs. D'après le théorème 2.24, \hat{f}_ℓ est convexe sur U .

Soient V^F et V^G deux simplexes de $T_\ell(V)$ s'intersectant le long d'une face de dimension $k-1$. Les polytopes de contrôle de f sur V^F et V^G représentent le même polynôme f et donc se recollent de manière \mathcal{C}^2 . Par conséquent, \hat{f}_ℓ est convexe sur V . ■

Grille de contrôle : approximation et convergence

3.1 Approximation par la grille de contrôle

Les coefficients de Bernstein d'un polynôme f sur un simplexe V interpolent celui-ci aux sommets de V (cf identité 1.2). Pour des applications en ingénierie (par exemple en conception assistée par ordinateur), il est utile de mesurer l'écart entre les autres coefficients de Bernstein et le graphe de f . On propose dans ce chapitre de donner une borne explicite de cet écart.

Le cas univarié est connu ([NPL]), et l'étude du cas multivarié a été commencée par [R] avec les polynômes en 2 variables. L'objet de ce chapitre est de généraliser ces résultats et de donner ainsi une borne explicite en dimension quelconque.

3.1.1 Le cas univarié

On rappelle ici les résultats obtenus en dimension 1.

Le cas d'un polynôme de degré $d \leq 1$ est trivial, à la vue de la propriété 1.1 de précision affine.

Soit donc $f \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d \geq 2$, considéré sur le segment $I = [0, 1]$, et

$$f(X) = \sum_{i=0}^d b_i B_i^d(X)$$

son écriture dans la base de Bernstein.

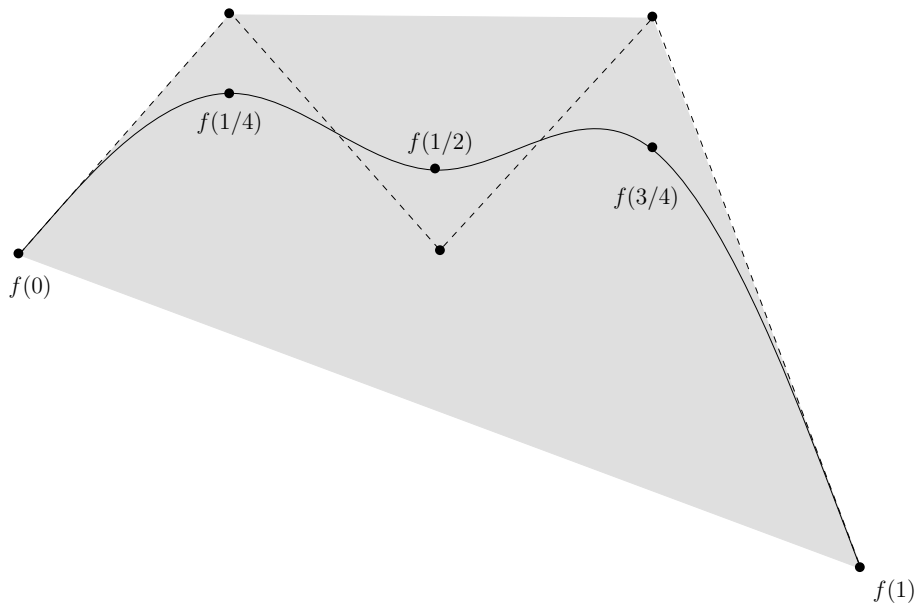
On souhaite mesurer l'écart entre f et son polygone de contrôle \hat{f} . Le résultat suivant, appelé propriété de l'enveloppe convexe, va dans ce sens :

Proposition 3.1. *Le graphe de f est inclus dans l'enveloppe convexe de la ligne de contrôle \hat{f} .*

Cependant, il est possible de donner une estimation plus précise de l'écart entre le graphe de f et sa ligne de contrôle \hat{f} .

On introduit pour cela la quantité

$$\|f - \hat{f}\|_{\infty} = \max_{t \in I} |f(t) - \hat{f}(t)|.$$


 FIGURE 3.1 – Ligne de contrôle et propriété de l’enveloppe convexe ($k = 1, d = 4$).

Enfin, on définit le vecteur $\Delta_2 b \in \mathbb{R}^{d-1}$ des différences secondes de f défini par

$$\forall i \in \{1, \dots, d-1\}, \Delta_2 b_i = b_{i-1} - 2b_i + b_{i+1}.$$

La norme infinie du vecteur $\Delta_2 b$ est définie de manière usuelle par

$$\|\Delta_2 b\|_\infty = \max_i |\Delta_2 b_i|.$$

On a alors le résultat suivant :

Théorème 3.2. Soit $f \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d \geq 2$, et

$$f(X) = \sum_{i=0}^d b_i B_i^d(X)$$

son écriture dans la base de Bernstein sur l’intervalle $[0, 1]$. L’écart entre f et son polygône de contrôle sur $[0, 1]$ est majoré de la manière suivante :

$$\|f - \hat{f}\|_\infty \leq \frac{\binom{d}{\frac{d}{2}} \binom{d}{\frac{d}{2}}}{2d} \|\Delta_2 b\|_\infty.$$

Ce résultat est dû à Nairn, Peters et Lutterkort ([NPL]). Une démonstration élégante et plus concise figure dans [R]. L’objet de la section suivante est la généralisation du résultat précédent au cas multivarié.

3.1.2 Approximation par la grille de contrôle

On se place tout d’abord sur le simplexe standard. Une borne explicite a été donnée par Reif dans l’article [R] pour les cas univarié et bivarié. On se propose dans cette section de donner une borne explicite en dimension quelconque.

Sur le simplexe standard

On considère un polynôme $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ sur le simplexe standard

$$\Delta = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid \forall i, x_i \geq 0 \text{ et } \sum x_i = 1\}$$

et on se propose d'étudier l'écart entre la grille de contrôle de f et son graphe sur la grille de Gréville. Par la suite, on utilisera les différences secondes de f , et on notera :

$$\|\Delta^2 b\|_\infty = \|\Delta^2 b(f, d, \Delta)\|_\infty = \max_{\substack{|\gamma|=d-2 \\ 0 \leq i < j \leq k}} |\Delta^2 b_{\gamma, i, j}(f, d, \Delta)|.$$

On montre alors le théorème suivant :

Théorème 3.3. *Soit $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ de degré d , sur le simplexe standard Δ . Alors :*

$$\max_{|\alpha|=d} \left| f\left(\frac{\alpha_1}{d}, \dots, \frac{\alpha_k}{d}\right) - b_\alpha(f, d, \Delta) \right| \leq \frac{dk(k+2)}{24} \|\Delta^2 b\|_\infty.$$

Preuve :

Soit α un multi-indice vérifiant $|\alpha| = d$, et montrons l'inégalité

$$\left| f\left(\frac{\alpha_1}{d}, \dots, \frac{\alpha_k}{d}\right) - b_\alpha(f, d, \Delta) \right| \leq \frac{dk(k+2)}{24} \|\Delta^2 b\|_\infty.$$

- On peut supposer, sans perte de généralité, que f est normalisé de telle sorte que l'on ait

$$\|\Delta^2 b\|_\infty = 1.$$

- Soit q_d la forme quadratique donnée dans l'exemple 2.22 vérifiant

$$\Delta^2 b(q_d, d, \Delta) = (1, \dots, 1).$$

- On a alors $\Delta^2 b(q_d + f, d, \Delta) \geq 0$, donc le polygône de contrôle de $q_d + f$ est convexe.

Notant N_α le point $\left(\frac{\alpha_1}{d}, \dots, \frac{\alpha_k}{d}\right)$ et g la fonction $q_d + f$, on a alors :

$$\begin{aligned} g(N_\alpha) &= \sum_{|\beta|=d} b_\beta(g, d, \Delta) B_\beta^d(N_\alpha) \\ &= \sum_{|\beta|=d} \hat{g}(N_\beta) B_\beta^d(N_\alpha) \\ &\geq \hat{g}\left(\sum_{|\beta|=d} B_\beta^d(N_\alpha) N_\beta\right), \end{aligned}$$

la dernière inégalité étant une conséquence de la convexité de \hat{g} .

La propriété de précision affine implique que, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$,

$$X_i = \sum_{|\beta|=d} \frac{\beta_i}{d} B_\beta^d(X_1, \dots, X_k).$$

Par conséquent,

$$\sum_{|\beta|=d} B_\beta^d(N_\alpha) N_\beta = N_\alpha,$$

et l'on obtient donc la majoration :

$$g(N_\alpha) \geq \hat{g}(N_\alpha),$$

soit

$$(q_d - \hat{q}_d)(N_\alpha) \geq -(f - \hat{f})(N_\alpha).$$

En considérant la fonction $q_d - f$, on montre de même que

$$(q_d - \hat{q}_d)(N_\alpha) \geq (f - \hat{f})(N_\alpha).$$

Finalement,

$$\left| (f - \hat{f})(N_\alpha) \right| \leq (q_d - \hat{q}_d)(N_\alpha).$$

L'étude de q_d faite dans le lemme suivant montre alors que

$$(q_d - \hat{q}_d)(N_\alpha) \leq \frac{dk(k+2)}{24},$$

ce qui permet de conclure. ■

Remarque : Les outils mis en jeu dans la preuve permettent également de prouver que la propriété de l'enveloppe convexe est vraie en dimension supérieure.

En effet, plaçons-nous (sans perte de généralité) sur le simplexe standard Δ . Les points du graphe d'un polynôme f sont les points $(x_1, \dots, x_k, f(x_1, \dots, x_k))$, et vérifient :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ f(x_1, \dots, x_k) \end{pmatrix} = \sum_{|\alpha|=d} \begin{pmatrix} \alpha_1/d \\ \vdots \\ \alpha_k/d \\ b_\alpha \end{pmatrix} B_\alpha^d(x_1, \dots, x_k) = \sum_{|\alpha|=d} \begin{pmatrix} N_\alpha \\ b_\alpha \end{pmatrix} B_\alpha^d(x_1, \dots, x_k).$$

Cette dernière somme est une combinaison convexe des points de contrôle (N_α, b_α) , et l'on a donc montré que le graphe de f est inclus dans l'enveloppe convexe des points de de contrôle f .

Il reste à montrer le lemme suivant :

Lemme 3.4. Soit $d \geq 2$ et $q_d \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ de degré 2 la forme quadratique de l'exemple 2.22 vérifiant

$$\Delta^2 b(q_d, d, \Delta) = (1, \dots, 1).$$

Alors :

$$\max_{|\alpha|=d} (q_d - \hat{q}_d) \left(\frac{\alpha_1}{d}, \dots, \frac{\alpha_k}{d} \right) \leq \frac{dk(k+2)}{24}.$$

Preuve :

• Puisque $\Delta^2 b(q_d, d, \Delta) = (1, \dots, 1) \geq 0$, \hat{q}_d est convexe.

De plus, q_d étant une forme quadratique, \hat{q}_d est nul sur le simplexe $\frac{1}{d} [\vec{0}, e_1, \dots, e_k]$ de la triangulation standard $T_d(\Delta)$ (cf exemple 4). Par conséquent, \hat{q}_d est positive sur Δ .

Ainsi, la matrice $\frac{d(d-1)}{2} M$ associée à q_d est semi-définie positive. Par conséquent, la matrice M l'est

aussi. En outre, son rang étant égal à k : en effet, si C_1, \dots, C_k désignent les colonnes de M , alors les opérations élémentaires suivantes :

$$C_j - (k - j + 1)C_k \rightarrow C_j \quad (1 \leq j \leq k - 1)$$

transforment M en une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -(k+1) & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ * & -(k+1) & & \vdots & 3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ * & \cdots & * & -(k+1) & k \end{pmatrix}$$

dont le rang est clairement égal à k .

Ainsi M est une matrice définie positive : q_d est une forme quadratique définie positive.

- On considère alors les quantités

$$q_d\left(\frac{\alpha_1}{d}, \dots, \frac{\alpha_k}{d}\right) - b_\alpha(q_d, d, \Delta)$$

pour $|\alpha| = d$.

D'après l'exemple 1.13, ces quantités valent

$$\begin{aligned} q_d\left(\frac{\alpha_1}{d}, \dots, \frac{\alpha_k}{d}\right) - b_\alpha(q_d, d, \Delta) &= \frac{d(d-1)}{2} \left(\left[\frac{1}{d^2} - \frac{1}{d(d-1)} \right] (\alpha_1, \dots, \alpha_k) M^t (\alpha_1, \dots, \alpha_k) + \sum_{i=1}^k m_{ii} \alpha_i \right) \\ &= \left[-\frac{1}{2d} \right] (\alpha_1, \dots, \alpha_k) M^t (\alpha_1, \dots, \alpha_k) + \frac{d(d-1)}{2} \sum_{i=1}^k m_{ii} \alpha_i. \end{aligned}$$

On définit l'application diff définie sur \mathbb{R}^k par :

$$\text{diff}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \left[-\frac{1}{2d} \right] (\alpha_1, \dots, \alpha_k) M^t (\alpha_1, \dots, \alpha_k) + \frac{d(d-1)}{2} \sum_{i=1}^k m_{ii} \alpha_i.$$

- diff est une application de classe C^∞ de \mathbb{R}^k vers \mathbb{R} , dont la matrice hessienne est $\frac{-1}{d}M$. Ainsi, diff est strictement concave. Son gradient est nul au point $\left(\frac{d}{k+1}, \dots, \frac{d}{k+1}\right)$, et sa valeur en ce point est donc l'unique maximum global de diff par concavité.

- On conclut en calculant :

$$\text{diff}\left(\frac{d}{k+1}, \dots, \frac{d}{k+1}\right) = \frac{dk(k+2)}{24},$$

ce qui fournit la majoration souhaitée. ■

Remarque : Pour $k = 1$, on retrouve la borne en $\frac{d}{8} \|\Delta^2 b\|_\infty$ du cas univarié.

Pour $k = 2$, on retrouve la borne en $\frac{d}{3} \|\Delta^2 b\|_\infty$ démontrée par Reif dans le cas bivarié ([R]).

Cas général

On se place désormais sur un simplexe non dégénéré V . On obtient alors le corollaire suivant :

Corollaire 3.5. Soit $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ de degré d , sur un simplexe non dégénéré $V = [V_0, \dots, V_k]$.

Alors :

$$\max_{|\alpha|=d} |f(N_\alpha) - b_\alpha(f, d, V)| \leq \frac{dk(k+2)}{24} \|\Delta^2 b(f, d, V)\|_\infty.$$

Preuve :

Soit A l'application affine de \mathbb{R}^k envoyant $\vec{0}$ sur V_0 et e_i sur V_i pour tout i .

On considère le polynôme $g(X) = f(A(X))$.

D'après la proposition 1.9, les coefficients de Bernstein de g vérifient :

$$b(g, d, \Delta) = b(f, d, V).$$

D'après le théorème précédent,

$$\max_{|\alpha|=d} \left| g\left(\frac{\alpha_1}{d}, \dots, \frac{\alpha_k}{d}\right) - b_\alpha(g, d, \Delta) \right| \leq \frac{dk(k+2)}{24} \|\Delta^2 b(g, d, \Delta)\|_\infty,$$

ce qui revient à dire :

$$\max_{|\alpha|=d} |f(N_\alpha) - b_\alpha(f, d, V)| \leq \frac{dk(k+2)}{24} \|\Delta^2 b(f, d, V)\|_\infty,$$

comme annoncé. ■

Remarque : La technique utilisée pour obtenir ce résultat d'approximation est basée sur le choix de la triangulation standard et la notion (continue) de polytope de contrôle, mais seule la grille de contrôle (une notion intrasèque et discrète) intervient dans ce résultat.

3.2 Convergence de la grille de contrôle vers le graphe de f sur la grille de Gréville

La section précédente donne une borne sur l'écart les points de contrôle d'un polynôme f de degré d , considéré sur un simplexe V , et son graphe sur la grille de Gréville. Les polynômes de Bernstein ont en outre la propriété remarquable suivante : si l'on exprime f dans les bases de Bernstein de degré $D > d$, alors la grille de contrôle de degré D converge vers le graphe de f sur la grille de Gréville de degré D , et cette convergence est linéaire en $1/D$ (paragraphe 11.9 de [PBP]). En outre, Les bases de Bernstein jouissent d'une autre propriété importante : le graphe d'un polynôme de degré d sur la grille de Gréville de degré d converge vers sa grille de contrôle de degré d quand le diamètre du simplexe tend vers 0, avec une convergence quadratique en le diamètre. On se propose ici de donner des majorations explicites, mettant en évidence ces ordres de convergence.

3.2.1 Convergence par élévation du degré

On commence par le lemme suivant, qui donne l'évolution des différences secondes (associées au simplexe standard) sous l'effet d'une élévation du degré.

Lemme 3.6. Soit $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ un polynôme de degré d sur le simplexe standard Δ . Soit $D \geq d$. Alors :

$$\|\Delta^2 b(f, D, \Delta)\|_\infty \leq \frac{d(d-1)}{D(D-1)} \|\Delta^2 b(f, d, \Delta)\|_\infty.$$

Preuve :

• Supposons que $\|\Delta^2 b(f, d, \Delta)\|_\infty = 1$.

Considérons la forme quadratique q_d donnée dans l'exemple 2.22 vérifiant

$$\Delta^2 b(q_d, d, \Delta) = (1, \dots, 1).$$

Alors $\Delta^2 b(q_d \pm f, d, \Delta) \geq 0$.

La proposition 2.23 exprime les différences secondes $\Delta^2 b(q_d \pm f, d, \Delta)$ comme coefficients de Bernstein de dérivées secondes directionnelles. La proposition 1.12 implique alors que $\Delta^2 b(q_d \pm f, D, \Delta) \geq 0$.

On en déduit alors que $\|\Delta^2 b(f, D, \Delta)\|_\infty \leq \|\Delta^2 b(q_d, D, \Delta)\|_\infty$.

• Dans le cas général, on obtient la majoration suivante :

$$\|\Delta^2 b(f, D, \Delta)\|_\infty \leq \|\Delta^2 b(q_d, D, \Delta)\|_\infty \|\Delta^2 b(f, d, \Delta)\|_\infty.$$

• Soit q_D la forme quadratique vérifiant

$$\Delta^2 b(q_D, D, \Delta) = (1, \dots, 1).$$

Alors $q_d = \frac{d(d-1)}{D(D-1)} q_D$, et donc

$$\Delta^2 b(q_d, D, \Delta) = \frac{d(d-1)}{D(D-1)} (1, \dots, 1).$$

Finalement,

$$\|\Delta^2 b(q_d, D, \Delta)\|_\infty = \frac{d(d-1)}{D(D-1)},$$

et donc

$$\|\Delta^2 b(f, D, \Delta)\|_\infty \leq \frac{d(d-1)}{D(D-1)} \|\Delta^2 b(f, d, \Delta)\|_\infty,$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

On obtient alors le théorème suivant, exprimant la convergence de la grille de contrôle de f vers son graphe sur la grille de Gréville sous l'action d'élévations du degré successives :

Théorème 3.7.

Soit $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ un polynôme de degré d sur le simplexe standard Δ . Soit $D \geq d$. Alors :

$$\max_{|\alpha|=D} \left| f\left(\frac{\alpha_1}{D}, \dots, \frac{\alpha_k}{D}\right) - b_\alpha(f, D, \Delta) \right| \leq \frac{k(k+2)}{24} \frac{d(d-1)}{D-1} \|\Delta^2 b(f, d, \Delta)\|_\infty.$$

Preuve :

D'après le théorème 3.3, on a :

$$\max_{|\alpha|=D} \left| f\left(\frac{\alpha_1}{D}, \dots, \frac{\alpha_k}{D}\right) - b_\alpha(f, D, \Delta) \right| \leq \frac{Dk(k+2)}{24} \|\Delta^2 b\|_\infty.$$

Or d'autre part, le lemme précédent fournit la majoration

$$\|\Delta^2 b(f, D, \Delta)\|_\infty \leq \frac{d(d-1)}{D(D-1)} \|\Delta^2 b(f, d, \Delta)\|_\infty.$$

En combinant ces deux majorations, on obtient :

$$\max_{|\alpha|=D} \left| f\left(\frac{\alpha_1}{D}, \dots, \frac{\alpha_k}{D}\right) - b_\alpha(f, D, \Delta) \right| \leq \frac{Dk(k+2)}{24} \frac{d(d-1)}{D(D-1)} \|\Delta^2 b(f, d, \Delta)\|_\infty,$$

ce qui conduit immédiatement au résultat annoncé. ■

3.2.2 Convergence par subdivision

Considérant un polynôme f sur un simplexe V , on peut effectuer une subdivision de celui-ci, de telle sorte que le diamètre des sous-simplexes soient moindre que celui de V , et itérer cette démarche. Si, pour chaque sous-simplexe, le diamètre tend vers 0, alors la grille de contrôle associée converge vers le graphe de f sur la grille de Gréville. La rapidité de convergence est connue : elle est quadratique (paragraphe 11.4 de [PBP]).

On se propose de donner ici une majoration explicite, dans le cadre où le simplexe de départ est le simplexe standard, subdivisé à l'aide de triangulations standard de degré 2 successives.

L'étude de l'évolution des différences secondes d'un polynôme sous l'action de triangulations standard de degré 2 successives du simplexe standard est l'objet du prochain théorème.

Soit $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ un polynôme de degré d sur le simplexe standard Δ . Soient $N \in \mathbb{N}^*$, et U un simplexe de la triangulation standard $T_{2^N}(\Delta)$, et h le diamètre de U .

On notera par la suite b_α les coefficients de Bernstein sur Δ et b_α^* ceux sur U .

On a alors :

Théorème 3.8.

$$\|\Delta^2 b^*(f)\|_\infty \leq \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{24} \|\Delta^2 b(f)\|_\infty h^2.$$

Preuve :

• supposons que $\|\Delta^2 b(f)\|_\infty = 1$, et soit q_d la forme quadratique de l'exemple 2.22 vérifiant

$$\Delta^2 b(q_d) = (1, \dots, 1).$$

Alors $\Delta^2 b(q_d \pm f) \geq 0$, et donc $\Delta^2 b^*(q_d \pm f) \geq 0$: en effet, les différences secondes de $\Delta^2 b^*(q_d \pm f)$ sont les coefficients de Bernstein de dérivées directionnelles de $\frac{-1}{d(d-1)}(q_d \pm f)$ sur U . Ces coefficients se calculent par exemple à l'aide d'algorithmes de de Casteljaou successifs (cf exemple 1.11). Dans le cas présent, l'algorithme de De Casteljaou effectue des combinaisons convexes de coefficients positifs, et donc les coefficients obtenus en sortie sont tous positifs. Ainsi, on a bien $\Delta^2 b^*(q_d \pm f) \geq 0$.

On en déduit :

$$\|\Delta^2 b^*(f)\|_\infty \leq \|\Delta^2 b^*(q_d)\|_\infty.$$

Il suffit d'étudier l'évolution des différences secondes de q_d sous l'action des triangulations standard successives.

• Pour $|\gamma| = d - 2$ et $0 \leq i \leq j \leq k$, la différence seconde $\Delta_2 b_{\gamma, i, j}(q_d, d, U)$ se déduit du coefficient de Bernstein de la dérivée seconde directionnelle comme suit :

$$b_{\gamma, i, j}(q_d, d, U) = \frac{-1}{d(d-1)} b(D_{U_j - U_{j-1}} D_{U_i - U_{i-1}} q_d, d, U).$$

Or

$$D_{U_j - U_{j-1}} D_{U_i - U_{i-1}} q_d = \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k (U_j - U_{j-1})_m (U_i - U_{i-1})_n \frac{\partial^2 q_d}{\partial X_m \partial X_n}$$

et les dérivées partielles secondes de q_d , qui est une forme quadratique, sont aisément calculables :

$$\frac{\partial^2 q_d}{\partial X_m \partial X_n} = \frac{d(d-1)}{2} \begin{cases} M_{mn} & \text{si } m < n, \\ 2M_{mm} & \text{si } m = n, \\ M_{nm} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où l'on a encore noté M la matrice associée définie dans l'exemple 2.22. Si h désigne le diamètre de U , on obtient alors :

$$|b_{\gamma,i,j}(q_d, d, U)| \leq h^2 \sum_{m=1}^n \sum_{n=m}^k M_{mn}.$$

Se rappelant la définition $M_{mn} = m(k-n+1)$ pour $1 \leq m \leq n$, la quantité $\sum_{m=1}^n \sum_{n=m}^k M_{mn}$ se calcule facilement :

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n \sum_{n=m}^k M_{mn} &= \sum_{m=1}^k m \sum_{n=m}^k (k-n+1) \\ &= \sum_{m=1}^k m \sum_{l=1}^{k-m+1} l \\ &= \sum_{m=1}^k m \frac{(k-m+1)(k-m+2)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^k m^3 - (2k+3) \sum_{m=1}^k m^2 + (k+1)(k+2) \sum_{m=1}^k m \right) \\ &= \frac{k^2(k+1)^2}{8} - \frac{(2k+3)k(k+1)(2k+1)}{12} + \frac{k(k+1)^2(k+2)}{4} \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{24} \end{aligned}$$

On obtient donc

$$|b_{\gamma,i,j}(q_d, d, U)| \leq h^2 \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{24},$$

et finalement :

$$\|\Delta^2 b^*(q_d)\|_{\infty} \leq h^2 \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{24}.$$

On obtient alors

$$\|\Delta^2 b^*(f)\|_{\infty} \leq \|\Delta^2 b^*(q_d)\|_{\infty} \leq h^2 \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{24}.$$

• On obtient donc finalement la majoration :

$$\|\Delta^2 b^*(f)\|_{\infty} \leq \|\Delta^2 b^*(q_d)\|_{\infty} \|\Delta^2 b(f)\|_{\infty} \leq \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{24} \|\Delta^2 b(f)\|_{\infty} h^2,$$

ce que l'on voulait démontrer. ■

On donne maintenant une majoration du diamètre h du simplexe U :

Lemme 3.9. Avec les mêmes notations, le diamètre de U est majoré de la manière suivante :

$$h \leq \frac{\sqrt{k}}{2^N}.$$

Preuve :

On note

$$U = [U_0, \dots, U_k]$$

les sommets du simplexe U . Soit U_i et U_j ($i < j$) les sommets d'une arête réalisant le diamètre h de U . On considère la ligne brisée joignant successivement les sommets U_i, \dots, U_j . La distance entre deux sommets successifs vaut par définition $\frac{1}{2^N}$. Le théorème de Pythagore affirme alors que le segment joignant les sommets U_i et U_j a pour longueur $\frac{\sqrt{k}}{2^N}$. ■

Associé au corollaire 3.5, on obtient alors le

Corollaire 3.10. *Avec les mêmes notations que précédemment, on a :*

Alors :

$$\max_{|\alpha|=d} |f(N_\alpha) - b_\alpha(f, d, U)| \leq \frac{dk^3(k+1)(k+2)^2(k+3)}{24^2 \cdot 2^{2N}} \|\Delta^2 b(f, d, \Delta)\|_\infty,$$

où l'on a noté N_α les points de la grille de Gréville associée au simplexe U .

Borne sur le minimum d'un polynôme strictement positif

Le présent chapitre est consacré à l'obtention d'une borne inférieure relative au minimum d'un polynôme multivarié strictement positif sur le simplexe standard.

4.1 Représentation univariée rationnelle

On introduit tout d'abord la notion de représentation univariée rationnelle, qui sera utile dans la section suivante. Les notions abordées ici sont étudiées en détails dans [BPR].

On introduit d'abord la notion de codage à la Thom :

Définition 4.1.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $x \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \{0, 1, -1\}^{Der(P)}$ une condition de signe sur l'ensemble $Der(P) = \{P, P', \dots, P^{(\deg P)}\}$ des dérivées de P .

La condition de signe σ est un codage à la Thom de x si $\sigma(P) = 0$ et

$$\forall i, \quad \text{signe}(P^{(i)}(x)) = \sigma(P^{(i)}).$$

On peut maintenant définir la notion de représentation univariée rationnelle.

Définition 4.2.

Une k -représentation univariée rationnelle u est un

$(k+3)$ -uplet

$$u = (F(T), g_0(T), \dots, g_k(T), \pi)$$

tel que :

1. $F, g_0, \dots, g_k \in \mathbb{R}[T]$
2. F et g_0 sont premiers entre eux,
3. π est le codage à la Thom d'une racine $t_\pi \in \mathbb{R}$ de F .

Remarque : Si $t \in \mathbb{R}$ est une racine de F , alors $g_0(t) \neq 0$.

On peut donc donner la

Définition 4.3.

Le point associé à u est le point

$$x_u(t_\pi) = \left(\frac{g_1(t_\pi)}{g_0(t_\pi)}, \dots, \frac{g_s(t_\pi)}{g_0(t_\pi)} \right).$$

Il s'agit donc de donner un point dont les coordonnées sont données sous forme de fraction rationnelle évaluée en une racine de F .

La section suivante fera appel à l'algorithme suivant (cf Algorithm 12.15 de [BPR]), qui donne un point par composante connexe contenue dans la boule unité, du lieu d'annulation d'un polynôme positif :

Algorithme 4 Bounded Algebraic Sampling

ENTRÉES: Un polynôme $Q \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_k]$ positif sur \mathbb{R}^k .

SORTIES: Un ensemble \mathcal{U} de représentations univariées rationnelles de la forme

$$(F(T), g_0(T), \dots, g_k(T), \pi),$$

où les polynômes F, g_0, \dots, g_k sont à coefficients entiers.

Les points associés à ces représentations univariées rencontrent chacune des composantes connexes de $\mathcal{Z} = \{x \in \mathbb{R}^k \mid Q(x) = 0\}$ incluses dans la boule fermée $B(0, 1)$ de centre l'origine et de rayon 1.

L'analyse de complexité menée dans [BPR] montre que, si d_Q est une borne sur le degré de Q et τ_Q une borne sur la taille binaire de ses coefficients, alors :

1. Le degré des polynômes F, g_0, \dots, g_k est borné par

$$(d_Q + 2)(d_Q + 1)^{k-1}$$

2. La taille binaire de leurs coefficients est bornée par

$$(d_Q + 2)(d_Q + 1)^{k-1}(kd_Q + 2)(\tau' + 2\text{bit}(kd + 3) + 3\mu + \text{bit}(4k)),$$

où

$$\tau' = \sup[\tau_Q, d_Q + 2, \text{bit}(2k - 1)] + 1 + 2\text{bit}[k(d_Q + 2)]$$

$$\mu = \text{bit}[(d_Q + 2)(d_Q + 1)^{k-1}].$$

4.2 Borne sur le minimum

Cette section est consacrée à l'obtention d'un minorant du minimum d'un polynôme multivarié strictement positif sur le simplexe standard.

Soit donc $P \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_k]$ un polynôme à coefficients entiers de degré d , τ un majorant de la taille binaire de ses coefficients, et $m = \min_{\Delta} P$. On suppose de plus que $m > 0$, ie que P est strictement positif sur le simplexe standard Δ , où

$$\Delta = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid \forall i, x_i \geq 0 \text{ et } \sum x_i = 1\}.$$

On a alors facilement le

Lemme 4.4. Avec les notations précédentes, il existe une face σ de Δ de dimension $0 \leq s \leq k$ telle que le minimum m soit atteint en un point de l'intérieur de σ (munie de la topologie induite).

On considère dans la suite une telle face σ de dimension minimale s .

Remarque : Si $s = 0$, alors m est atteint en un sommet de Δ . Autrement dit,

$$\exists i \in \{1, \dots, k\}, P(e_i) = m.$$

On note

$$\begin{cases} V_0 = 0 \\ V_i = e_i \quad (1 \leq i \leq k) \end{cases}$$

les sommets de Δ , et

$$\begin{cases} \lambda_0 = 1 - \sum X_i \\ \lambda_i = X_i \quad (1 \leq i \leq k) \end{cases}$$

les coordonnées barycentriques associées.

Il existe un sous-ensemble $I = \{i_0, \dots, i_s\}$ de $\{0, \dots, k\}$ tel que les sommets de σ soient les points $(V_i)_{i \in I}$. Soit J le complémentaire de I dans $\{0, \dots, k\}$. La face σ est caractérisée par :

$$\sigma = \{x \in \Delta \mid \forall j \in J, \lambda_j(x) = 0\}.$$

On procède aux substitutions suivantes dans P :

- Si $j \in J$ et $j > 0$, on remplace la variable X_j par 0
- Si $j \in J$ et $j = 0$, on remplace la variable X_{i_0} par $1 - \sum_{\ell=1}^s X_{i_\ell}$

On obtient alors un polynôme $P_\sigma \in \mathbb{Z}[X_{i_1}, \dots, X_{i_s}]$ vérifiant :

$$\min_{\Delta} P = \min_{\sigma} P_\sigma.$$

Renommons les variables X_{i_ℓ} en Y_ℓ .

$P_\sigma \in \mathbb{Z}[Y_1, \dots, Y_s]$ est un polynôme vérifiant :

Lemme 4.5. Le degré de P_σ est majoré par d .

De plus, la taille binaire de ses coefficients est majorée par τ_σ , où

$$\tau_\sigma = \tau + 1 + d\text{bit}(k).$$

Preuve :

Le degré de P_σ est clairement inférieur à d .

Montrons maintenant le résultat relatif aux tailles binaires des coefficients.

- Le résultat est évident si $s = k$. Supposons $s \leq k - 1$.
- Si $s = 0$, alors $P_\sigma = P(V_i)$ pour un certain $i \in \{0, \dots, k\}$:

$$P_\sigma = \begin{cases} P(0, \dots, 0) & \text{si } i = 0 \\ P(e_i) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans les deux cas, $|P_\sigma| \leq (d + 1)2^\tau$, et la taille binaire des coefficients est bornée par

$$\tau + \text{bit}(d + 1) \leq \tau + d + 1 \leq \tau + 1 + d\text{bit}(k).$$

– Supposons $1 \leq s \leq k - 1$.

L'évaluation des variables X_j en 0 ne changeant pas la borne sur la taille binaire des coefficients de P , seule la substitution de Y_0 par $1 - \sum_{i=1}^s Y_i$ est à prendre en compte.

SI

$$P = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^k \\ |\alpha| \leq d}} a_\alpha X^\alpha,$$

alors

$$P_\sigma = \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^s \\ |\gamma| \leq d}} b_\gamma Y^\gamma,$$

où

$$b_\gamma = \sum_{\beta \in I_\gamma} \pm \binom{|\beta|}{\beta} a_{(\gamma_1 - \beta_1, \dots, \gamma_k - \beta_k)},$$

et

$$I_\gamma = \{\beta \in \mathbb{N}^{s+1} \mid |\beta| \leq d \text{ and } \forall i \in \{1, \dots, s\}, \beta_i \leq \gamma_i\}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} |b_\gamma| &\leq 2^\tau \sum_{\beta \in I_\gamma} \binom{|\beta|}{\beta} \\ &\leq 2^\tau \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^{s+1} \\ |\beta| \leq d}} \binom{|\beta|}{\beta} \\ &\leq 2^\tau \sum_{p=0}^d \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^{s+1} \\ |\beta|=p}} \binom{|\beta|}{\beta} \\ &\leq 2^\tau \sum_{p=0}^d (s+1)^p \\ &\leq 2^\tau \frac{(s+1)^{d+1}}{s} \\ &\leq 2^\tau \times 2(s+1)^d \\ &\leq 2^{\tau+1} k^d, \end{aligned}$$

et la conclusion s'ensuit. ■

On identifie désormais σ à un simplexe contenu dans la boule unité de \mathbb{R}^s . Puisque

$$\min_{\Delta} P = \min_{\sigma} P_\sigma,$$

$P_\sigma \in \mathbb{Z}[Y_1, \dots, Y_s]$ atteint son minimum à l'intérieur de σ . Par conséquent, ce minimum est atteint en un point critique de P_σ , ie un point $x \in \mathbb{R}^s$ annulant son gradient.

On considère alors l'ensemble des points critiques

$$\mathcal{Z} = \left\{ x \in \mathbb{R}^s \mid \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial P_\sigma}{\partial Y_i} \right)^2 (x) = 0 \right\}.$$

Remarque : Si C est une composante connexe de \mathcal{Z} , alors le gradient de P_σ est nul sur C , et P_σ est constant sur C .

On a alors la

Proposition 4.6. *Soit C une composante connexe de \mathcal{Z} contenant un minimiseur de P_σ dans σ . Alors*

$$C \subset \overset{\circ}{\sigma}.$$

En particulier, $C \subset B(0, 1)$, où $B(0, 1)$ désigne la boule (fermée) de \mathbb{R}^s de centre l'origine et de rayon 1.

Preuve :

Supposons qu'il existe une telle composante connexe C qui ne soit pas incluse dans $\overset{\circ}{\sigma}$.

Elle rencontre donc la frontière de σ , et donc l'intérieur d'une face de dimension inférieure. Puisque P_σ est constant sur C , il atteint son minimum à l'intérieur d'une face de dimension inférieure, contredisant ainsi la minimalité de σ , CQFD. ■

L'algorithme 4 (avec en entrée $Q = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial P_\sigma}{\partial Y_i} \right)^2$) fournit alors un ensemble de représentations univariées rationnelles du type

$$u = (F(T), g_0(T), g_1(T), \dots, g_s(T), \pi),$$

dont les points associés

$$x_u(t_\pi) = \left(\frac{g_1(t_\pi)}{g_0(t_\pi)}, \dots, \frac{g_s(t_\pi)}{g_0(t_\pi)} \right)$$

rencontrent toutes les composantes connexes de \mathcal{Z} contenues dans $B(0, 1)$.

En particulier, ils rencontrent les composantes connexes de \mathcal{Z} contenant un minimiseur de P_σ dans σ .

Lemme 4.7. *Le degré des polynômes F, g_0, \dots, g_s est majoré par d_u , où*

$$d_u = 2d(2d - 1)^{k-1}.$$

En outre, la taille binaire de leurs coefficients est majorée par τ_u , où

$$\tau_u = 2d(2d - 1)^{k-1}(2kd - 2k + 2) [\tau' + 2\text{bit}(2kd - 2k + 3) + 3\mu + \text{bit}(4k)],$$

où

$$\begin{aligned} \tau' &= \sup [2\tau + (2d + 1)\text{bit}(k) + (k + 2)\text{bit}(d) + 2, 2d, \text{bit}(2k - 1)] + 1 + 2\text{bit}[2kd] \\ \mu &= \text{bit} \left[2d(2d - 1)^{k-1} \right]. \end{aligned}$$

Preuve :

Soit Q le polynôme

$$Q = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial P_\sigma}{\partial Y_i} \right)^2.$$

Son degré est clairement majoré par $d_Q = 2d - 2$. De plus, on peut borner la taille binaire de ses coefficients comme suit :

Si

$$P_\sigma = \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^s \\ |\gamma| \leq d}} b_\gamma Y^\gamma,$$

alors

$$\left(\frac{\partial P_\sigma}{\partial Y_i} \right)^2 = \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^s \\ |\gamma| \leq d}} c_\gamma Y^{\gamma - 2e_i},$$

où

$$c_\gamma = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^s \\ \alpha \leq \gamma}} \alpha_i (\gamma_i - \alpha_i) a_\alpha a_{\gamma - \alpha}.$$

Ecrivons $Q = \sum_{\substack{\delta \in \mathbb{N}^s \\ |\delta| \leq d-2}} d_\delta Y^\delta$. Puisque $Q = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial P_\sigma}{\partial Y_i} \right)^2$, ses coefficients sont bornés de la manière suivante :

$$\begin{aligned} |d_\delta| &\leq s \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^s \\ \alpha \leq \gamma}} \alpha_i (\gamma_i - \alpha_i) a_\alpha a_{\gamma - \alpha} \\ &\leq s d^2 2^{2\tau_\sigma} d^k \\ &\leq k 2^{2\tau_\sigma} d^{k+2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la taille binaire des coefficients de Q est majorée par τ_Q , où

$$\tau_Q = 2\tau_\sigma + (k+2)\text{bit}(d) + \text{bit}(k) = 2\tau + (2d+1)\text{bit}(k) + (k+2)\text{bit}(d) + 2.$$

La preuve du lemme découle maintenant de l'analyse de complexité de l'algorithme 4. ■

On construit alors les polynômes

$$P_u(T) = g_0(T)^d P_\sigma \left(\frac{g_1(T)}{g_0(T)}, \dots, \frac{g_s(T)}{g_0(T)} \right).$$

On a alors le

Lemme 4.8. *Soit P_u un polynôme ainsi construit.*

Le degré de P_u est majoré par $d_{P,u}$, où

$$d_{P,u} = d_u d.$$

En outre, la taille binaire des coefficients de P_u est majorée par $\tau_{P,u}$, où

$$\tau_{P,u} = \tau + d\text{bit}(k) + d[\tau_u + \text{bit}(d_u)] + d + k + 1.$$

Preuve :

- Le fait que le degré de P_u soit majoré par $d_{P,u} = d(2d+2)(2d-1)^{k-1}$ est clair à la vue du lemme précédent.
- La borne sur la taille binaire des coefficients est obtenue par substitution, en utilisant la proposition 8.11 de [BPR]. ■

Le minimum m de P_σ sur σ est atteint par un point $x \in \sigma$ contenu dans une composante connexe de \mathcal{Z} . Puisque P_σ est constant sur une telle composante connexe, m est donc également atteint par un point $x_u(t_\pi)$ associé à une représentation rationnelle univariée $u = (F(T), g_0(T), g_1(T), \dots, g_s(T), \pi)$ calculée précédemment.

t_π étant une racine de F , le minimum $m = P_\sigma(x_u(t_\pi))$ est une racine du résultant

$$R(Z) = \text{Res}_T \left(P_u(T) - g_0(T)^d Z, F(T) \right).$$

On note

$$F(T) = \sum_{i=0}^{d_u} f_i T^i,$$

$$P_u(T) = \sum_{i=0}^{d_{P,u}} a_i T^i$$

et

$$g_0(T)^d = \sum_{i=0}^{d_u d} b_i T^i = \sum_{i=0}^{d_{P,u}} b_i T^i.$$

Lemme 4.9. $g_0(T)^d$ est un polynôme univarié de degré $d_u d = d_{P,u}$, dont la taille binaire des coefficients est majorée par $\tau_{g_0^d}$, où

$$\tau_{g_0^d} = d(\tau_u + \text{bit}(d_u + 1)).$$

Preuve :

L'assertion concernant le degré est claire. Montrons maintenant celle concernant la taille binaire des coefficients.

Rappelons que g_0 est de degré borné par d_u et a ses coefficients de taille binaire majorée par τ_u . Multiplier un polynôme univarié f par g_0 augmente alors la taille binaire des coefficients d'au plus $\tau_u + \text{bit}(d_u + 1)$. En effet, les coefficients du polynôme $f g_0$ ainsi formé sont des sommes d'au plus $(d_u + 1)$ produits d'un coefficient de f par un coefficient de g_0 .

La conclusion s'ensuit immédiatement. ■

Le résultant $R(Z)$ est le déterminant de la matrice de Sylvester $S(Z)$ suivante :

$$\left(\begin{array}{cccccccccc} a_{d_{P,u}} - b_{d_{P,u}}Z & \cdots & \cdots & \cdots & a_1 - b_1Z & a_0 - b_0Z & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \ddots & & & & & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & & & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{d_{P,u}} - b_{d_{P,u}}Z & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 - b_0Z & \\ f_{d_u} & \cdots & \cdots & \cdots & f_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \\ 0 & \ddots & & & & \ddots & \ddots & & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & & & 0 & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & f_{d_u} & \cdots & \cdots & \cdots & f_0 & \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} d_u \text{ lignes} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

On a alors la propriété suivante :

Proposition 4.10. R est un polynôme en Z de degré d_u , et si l'on note $R(Z) = \sum_{i=0}^{d_u} r_i Z^i$, les coefficients r_i vérifient :

$$\forall i \in \{0, \dots, d_u\}, \quad |r_i| \leq \left[2^{\tau_u} \sqrt{d_u + 1} \right]^{d_{P,u}} \binom{d_u(d_u + 1)}{i} \left[2^{\tau_{P,u}} \sqrt{d_{P,u} + 1} \right]^{d_u(d_u + 1) - i} \left[2^{d(\tau_u + \text{bit}(d_u + 1))} \right]^i.$$

Preuve :

• Clairement, $\deg_Z(R) = d_u$.

• Afin de majorer les coefficients de R , on introduit les notations suivantes :

Si $h : \{1, \dots, d_u\} \times \{1, \dots, d_u + d_{P,u}\} \rightarrow \{0, 1\}$, on note $n(h) = \#\{(i, j) \mid h(i, j) = 1\}$.

On note également \mathcal{H} l'ensemble des applications $h : \{1, \dots, d_u\} \times \{1, \dots, d_u + d_{P,u}\} \rightarrow \{0, 1\}$ vérifiant les conditions suivantes :

- $h(i, j) = 1 \Rightarrow S(Z)_{i,j} \neq 0$
- $\#\{j \mid \exists i, h(i, j) = 1\} = n(h)$
- $\#\{i \mid \exists j, h(i, j) = 1\} = n(h)$.

Pour $h \in \mathcal{H}$, on note S_h la matrice extraite de $S(0)$ en enlevant les lignes i et les colonnes j telles que $h(i, j) = 1$.

La multilinéarité du déterminant entraîne alors :

$$R(Z) = \det(S(Z)) = \sum_{h \in \mathcal{H}} \pm \det(S_h) b_h Z^{n(h)},$$

où b_h est un produit de $n(h)$ coefficients b_i .

$\det(S_h)$ est un mineur de taille $(d_u + d_{P,u} - n(h)) \times (d_u + d_{P,u} - n(h))$ extrait de $S(0)$ en enlevant $n(h)$ parmi les d_u premières lignes et $n(h)$ colonnes. L'inégalité d'Hadamard entraîne alors :

$$\begin{aligned} |\det(S_h)| &\leq \sqrt{\left[(d_{P,u} + 1) (2^{\tau_{P,u}} - 1)^2 \right]^{d_u - n(h)} \left[(d_u + 1) (2^{\tau_u} - 1)^2 \right]^{d_{P,u}}} \\ &< \left[2^{\tau_{P,u}} \sqrt{d_{P,u} + 1} \right]^{d_u - n(h)} \left[2^{\tau_u} \sqrt{d_u + 1} \right]^{d_{P,u}}. \end{aligned}$$

On a alors pour tout ℓ :

$$|r_\ell| \leq \sum_{\{h \in \mathcal{H} \mid n(h) = \ell\}} |\det(S_h)| |b_h|$$

$$\begin{aligned}
 &< \sum_{\{h \in \mathcal{H} | n(h) = \ell\}} \left[2^{\tau_{P,u}} \sqrt{d_{P,u} + 1} \right]^{d_u - n(h)} \left[2^{\tau_u} \sqrt{d_u + 1} \right]^{d_{P,u}} 2^{n(h)\tau_{g_0^d}} \\
 &\leq \sum_{\{h \in \mathcal{H} | n(h) = \ell\}} \left[2^{\tau_{P,u}} \sqrt{d_{P,u} + 1} \right]^{d_u - \ell} \left[2^{\tau_u} \sqrt{d_u + 1} \right]^{d_{P,u}} 2^{\ell d(\tau_u + \text{bit}(d_u + 1))} \\
 &\leq \left[2^{\tau_{P,u}} \sqrt{d_{P,u} + 1} \right]^{d_u - \ell} \left[2^{\tau_u} \sqrt{d_u + 1} \right]^{d_{P,u}} 2^{\ell d(\tau_u + \text{bit}(d_u + 1))} \#\{h \in \mathcal{H} | n(h) = \ell\} \\
 &\leq \left[2^{\tau_{P,u}} \sqrt{d_{P,u} + 1} \right]^{d_u - \ell} \left[2^{\tau_u} \sqrt{d_u + 1} \right]^{d_{P,u}} 2^{\ell d(\tau_u + \text{bit}(d_u + 1))} \binom{d_u(d_u + 1)}{\ell},
 \end{aligned}$$

l'inégalité $\#\{h \in \mathcal{H} | n(h) = \ell\} \leq \binom{d_u(d_u + 1)}{\ell}$ découlant du fait qu'il y a au plus $d_u(d_u + 1)$ couples (i, j) tels que $i \leq d_u$ et $S(Z)_{i,j} \neq 0$.

On obtient finalement la majoration :

$$|r_\ell| \leq \left[2^{\tau_u} \sqrt{d_u + 1} \right]^{d_{P,u}} \binom{d_u(d_u + 1)}{\ell} \left[2^{\tau_{P,u}} \sqrt{d_{P,u} + 1} \right]^{d_u(d_u + 1) - \ell} \left[2^{d(\tau_u + \text{bit}(d_u + 1))} \right]^\ell,$$

comme annoncé. ■

Le minimum m étant une racine du résultant $R(Z)$, la borne de Cauchy permet d'obtenir finalement le

Théorème 4.11. *Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ un polynôme réel de degré d , τ un majorant de la taille binaire de ses coefficients, et $m = \min_{\Delta} P$ le minimum de P sur le simplexe standard Δ . On suppose $m > 0$.*

De plus, soit \mathcal{U} un ensemble de représentations univariées du type

$$u = (F(T), g_0(T), \dots, g_k(T), \pi)$$

donnant un point par composante connexe incluse dans $B(0, 1)$ de chaque

$$\mathcal{Z}_\sigma = \left\{ x \in \mathbb{R}^s \mid \frac{\partial P_\sigma}{\partial Y_1}(x) = \dots = \frac{\partial P}{\partial Y_s}(x) = 0 \right\},$$

où σ décrit l'ensemble des faces de V .

Soit en outre d_u (resp. τ_u) une borne sur le degré (resp. la taille binaire) des polynômes intervenant dans les représentations univariées de \mathcal{U} .

On pose alors

$$d_{P,u} = d_u d$$

et

$$\tau_{P,u} = \tau + d \text{bit}(k) + d[\tau_u + \text{bit}(d_u)] + d + k + 1.$$

$d_{P,u}$ (resp. $\tau_{P,u}$) est alors une borne sur le degré (resp. la taille binaire) des polynômes

$$P_u(T) = g_0(T)^d P_\sigma \left(\frac{g_1(T)}{g_0(T)}, \dots, \frac{g_s(T)}{g_0(T)} \right).$$

Alors

$$m > m_{d,\tau,u},$$

où

$$m_{d,\tau,u} = \frac{1}{[2^{\tau_u} \sqrt{d_u + 1}]^{d_{P,u}} [2^{\tau_{P,u}} \sqrt{d_{P,u} + 1} + 2^{d(\tau_u + \text{bit}(d_u + 1))}]^{d_u(d_u + 1)}}.$$

En particulier, on peut prendre

$$\begin{aligned} d_u &= 2d(2d - 1)^{k-1} \\ \tau_u &= 2d(2d - 1)^{k-1}(2kd - 2k + 2) [\tau' + 2\text{bit}(2kd - 2k + 3) + 3\mu + \text{bit}(4k)], \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \tau' &= \sup [2\tau + (2d + 1)\text{bit}(k) + (k + 2)\text{bit}(d) + 2, 2d, \text{bit}(2k - 1)] + 1 + 2\text{bit}[2kd] \\ \mu &= \text{bit}[2d(2d - 1)^{k-1}]. \end{aligned}$$

On notera par la suite $m_{d,\tau}$ la borne obtenue avec ce choix.

Preuve :

En enlevant des termes nuls, et puisque R a au moins une racine non nulle (m), on peut écrire

$$R(Z) = \sum_{i=c}^{d_u} r_i Z^i,$$

avec $d_u > c$ et $r_c r_{d_u} \neq 0$.

La borne de Cauchy entraîne alors :

$$\begin{aligned} m &\geq \frac{1}{\sum_{i=0}^{d_u} |r_i|} \\ &> \frac{1}{\sum_{i=0}^{d_u} [2^{\tau_u} \sqrt{d_u + 1}]^{d_{P,u}} \binom{d_u(d_u + 1)}{i} [2^{\tau_{P,u}} \sqrt{d_{P,u} + 1}]^{d_u(d_u + 1) - i} [2^{d(\tau_u + \text{bit}(d_u + 1))}]^i} \\ &\geq \frac{1}{[2^{\tau_u} \sqrt{d_u + 1}]^{d_{P,u}} \sum_{i=0}^{d_u} \binom{d_u(d_u + 1)}{i} [2^{\tau_{P,u}} \sqrt{d_{P,u} + 1}]^{d_u(d_u + 1) - i} [2^{d(\tau_u + \text{bit}(d_u + 1))}]^i} \\ &\geq \frac{1}{[2^{\tau_u} \sqrt{d_u + 1}]^{d_{P,u}} \sum_{i=0}^{d_u} \binom{d_u(d_u + 1)}{i} [2^{\tau_{P,u}} \sqrt{d_{P,u} + 1}]^{d_u(d_u + 1) - i} [2^{d(\tau_u + \text{bit}(d_u + 1))}]^i} \\ &\geq \frac{1}{[2^{\tau_u} \sqrt{d_u + 1}]^{d_{P,u}} [2^{\tau_{P,u}} \sqrt{d_{P,u} + 1} + 2^{d(\tau_u + \text{bit}(d_u + 1))}]^{d_u(d_u + 1)}}, \end{aligned}$$

ce que l'on voulait démontrer. ■

Remarque : La borne obtenue ici est du même ordre que celle obtenue dans [dLS], où les auteurs utilisent une version effective de l'inégalité de Lojasiewicz, faisant intervenir une constante universelle. L'avantage de la borne obtenue ici est qu'elle est totalement explicite.

Certificats de positivité dans la base de Bernstein multivariée

L'objet de ce chapitre est l'obtention de certificats de positivité, *i.e.* d'identités algébriques certifiant la positivité d'un polynôme donné $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ sur un simplexe.

5.1 Certificats de positivité

Quitte à appliquer une transformation affine, on peut toujours supposer que le simplexe considéré est le simplexe standard Δ de \mathbb{R}^k . Si d désigne le degré de f , on considère la base de Bernstein de degré d associée au simplexe standard, et on note b_α ($|\alpha| = d$) les coefficients de Bernstein de f associés, et $b = b(f, d, \Delta)$ leur liste (dans l'ordre lexicographique par exemple).

On définit alors le certificat de positivité suivant :

Définition 5.1.

$$(Cert(b)) : \begin{cases} \forall |\alpha| = d, & b_\alpha \geq 0 \\ \forall i = 0, \dots, k, & b_{de_i} > 0. \end{cases}$$

La proposition suivante est alors immédiate :

Proposition 5.2. *Si f vérifie le certificat $Cert(b(f, d, \Delta))$, alors f est strictement positif sur Δ .*

Remarque : La réciproque est fautive, dès la dimension 1 : le polynôme $6X^2 - 6X + 2$ est strictement positif sur $[0, 1]$, et ses coefficients de Bernstein de degré 2 sont $(2, -1, 2)$.

5.2 Certificats de positivité et élévation du degré

On vient de voir qu'un polynôme de degré d strictement positif sur Δ ne satisfait pas nécessairement le certificat de positivité 5.1. Cependant, puisque les grilles de contrôle convergent vers le graphe de f sur la grille de Gréville sous l'action d'élévations de degré (cf théorème 3.7), si on considère f comme de degré D pour D assez grand, tous les coefficients de Bernstein de degré D de f satisfont le certificat de positivité. Le théorème suivant donne une borne précise sur le degré à considérer :

Théorème 5.3. Soit $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ de degré d , strictement positif sur le simplexe standard Δ . Soit m le minimum de f sur Δ .

Si $D > \frac{k(k+2)d(d-1)}{24m} \|\Delta^2 b(f, d, \Delta)\|_\infty$, alors f vérifie le certificat de positivité $\text{Cert}(b(f, D, \Delta))$.

Preuve :

- Soit D assez grand pour que

$$\max_{|\alpha|=D} \left| f\left(\frac{\alpha_1}{D}, \dots, \frac{\alpha_k}{D}\right) - b_\alpha(f, D, \Delta) \right| \leq m.$$

Alors tous les coefficients de Bernstein de f de degré D sont positifs ou nuls, et la propriété d'interpolation aux sommets montre que f vérifie le certificat de positivité $\text{Cert}(b(f, D, \Delta))$.

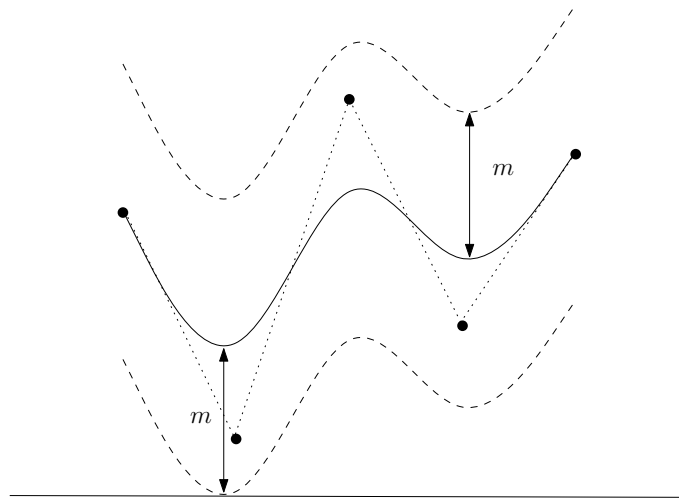


FIGURE 5.1 – Illustration en dimension 1.

- D'après le théorème 3.7,

$$\max_{|\alpha|=D} \left| f\left(\frac{\alpha_1}{D}, \dots, \frac{\alpha_k}{D}\right) - b_\alpha(f, D, \Delta) \right| \leq \frac{k(k+2)}{24} \frac{d(d-1)}{D-1} \|\Delta^2 b(f, d, \Delta)\|_\infty,$$

ce qui conduit au résultat annoncé. ■

Remarque : Powers et Reznick ([RP]) ont également démontré la borne suivante :

Théorème 5.4. Soit f un polynôme de degré d , strictement positif sur Δ , et m son minimum sur Δ .

Si $D > \frac{d(d-1)}{2} \frac{\max_{|\alpha|=d} |b_\alpha(f, d, \Delta)|}{m}$, alors f vérifie le certificat $\text{Cert}(b(f, D, \Delta))$.

On peut noter que cette borne ne dépend pas de la dimension ambiante.

Remarque : On note

$$B_1 = \frac{k(k+2)d(d-1)}{24m} \|\Delta^2 b(f, d, \Delta)\|_\infty$$

la borne obtenue dans le théorème 5.3, et

$$B_2 = \frac{d(d-1)}{2} \frac{\max_{|\alpha|=d} |b_\alpha(f, d, \Delta)|}{m}$$

la borne obtenue par Powers et Reznick.

1. En dimension $k = 1$, on a :

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{k(k+2)d(d-1)}{24m} \|\Delta^2 b(f, d, \Delta)\|_\infty \\ &= \frac{d(d-1)}{8m} \|\Delta^2 b(f, d, \Delta)\|_\infty \\ &\leq \frac{d(d-1)}{8m} 4 \|b(f, d, \Delta)\|_\infty \\ &\leq B_2. \end{aligned}$$

Ainsi, en dimension 1, la borne obtenue dans le théorème 5.3 est meilleure que celle obtenue par Powers et Reznick.

On suppose désormais $k \geq 2$.

2. On considère le polynôme P constant, égal à 1, exprimé dans la base de Bernstein de degré $d \geq 2$.

$$\text{Alors } B_1 = 0 < \frac{d(d-1)}{2} = B_2.$$

3. On considère le polynôme $P = 1 + q_d$, exprimé dans la base de Bernstein de degré $d \geq 2$, où q_d est la forme quadratique définie positive introduite dans l'exemple 2.22. P est strictement positif sur Δ , exprimé dans la base de Bernstein de degré $d \geq 2$.

Alors d'une part

$$\|\Delta^2 b(P, d, \Delta)\|_\infty = \|\Delta^2 b(q_d, d, \Delta)\|_\infty = 1,$$

et d'autre part

$$\|b(P, d, \Delta)\|_\infty \geq \|b(q_d, d, \Delta)\|_\infty \geq \frac{k(k+2)d(d-1)}{8}.$$

En effet, supposons tout d'abord k pair. Considérons le multi-indice $\alpha = de_{k/2}$. La définition de q_d et le calcul effectué dans l'exemple 1.13 montre alors que :

$$b_\alpha(q_d, d, \Delta) = \frac{d(d-1)}{2} \frac{k}{2} \left(\frac{k}{2} + 1 \right) = \frac{d(d-1)k(k+2)}{8},$$

et donc

$$\|b(P, d, \Delta)\|_\infty \geq \|b(q_d, d, \Delta)\|_\infty \geq b_\alpha(q_d, d, \Delta) = \frac{d(d-1)k(k+2)}{8}.$$

De même, si k est impair, considérant le multi-indice $\alpha = de_{(k+1)/2}$, on obtient :

$$b_\alpha(q_d, d, \Delta) = \frac{d(d-1)}{2} \frac{k+1}{2} \left(k - \frac{k+1}{2} + 1 \right) = \frac{d(d-1)(k+1)^2}{8},$$

et donc on a encore

$$\|b(P, d, \Delta)\|_\infty \geq b_\alpha(q_d, d, \Delta) \geq \frac{d(d-1)k(k+2)}{8}.$$

Dans les deux cas, on obtient

$$B_2 \geq \frac{k(k+2)d^2(d-1)^2}{16m},$$

alors que

$$B_1 = \frac{k(k+2)d(d-1)}{24m},$$

de sorte que

$$B_2 \geq \frac{2d(d-1)}{3}B_1 \geq \frac{4}{3}B_1.$$

4. Soit $d \geq 2$, et $P = 3/2 + (1 - 2X_1)^d \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$.

Le calcul effectué dans l'exemple 1.7 montre que

$$\forall \alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_k), |\alpha| = d, \quad b_\alpha(P, d, \Delta) = 3/2 + (-1)^{\alpha_1}.$$

Par conséquent,

$$\|b(P, d, \Delta)\|_\infty = 5/2.$$

D'autre part, si $\gamma = (d-2)e_0, i = 1$ et $j = 2$, alors

$$\begin{aligned} \Delta^2 b_{\gamma, i, j}(P, d, \Delta) &= b_{\gamma+e_0+e_2}(P, d, \Delta) + b_{\gamma+2e_1}(P, d, \Delta) - b_{\gamma+e_0+e_1}(P, d, \Delta) - b_{\gamma+e_1+e_2}(P, d, \Delta) \\ &= 1 + 1 - (-1) - (-1) = 4. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|\Delta^2 b(P, d, \Delta)\|_\infty \geq 4,$$

de sorte que

$$B_1 \geq \frac{k(k+2)d(d-1)}{6m} = \frac{2k(k+2)}{15}B_2 \geq \frac{16}{15}B_2.$$

Ces exemples montrent donc qu'aucune des bornes n'est meilleure que l'autre en dimension $k \geq 2$.

On a alors le corollaire :

Corollaire 5.5. *Soit f un polynôme de degré d , strictement positif sur Δ , et m son minimum sur Δ .*

Si $D > \max(B_1, B_2)$, où

$$B_1 = \frac{k(k+2)d(d-1)}{24m} \|\Delta^2 b(f, d, \Delta)\|_\infty$$

et

$$B_2 = \frac{d(d-1)}{2} \frac{\max_{|\alpha|=d} |b_\alpha(f, d, \Delta)|}{m},$$

alors f vérifie le certificat $\text{Cert}(b(f, D, \Delta))$.

5.3 Certificats de positivité et subdivision

Les bornes données dans la section précédente peuvent être très grandes, et conduire à une taille de certificat très grande. Dans l'article [BCR], une alternative est proposée dans le cadre univarié afin d'obtenir des certificats plus courts. Il s'agit alors de subdiviser l'intervalle $[0, 1]$, jusqu'à ce que f vérifie les certificats de positivité de degré d sur chaque sous-simplexe obtenu.

Cette idée est généralisable en dimension quelconque. En exécutant des triangulations standard successives de Δ , les grilles de contrôle obtenues convergent vers le graphe de f sur les grilles de Gréville de chaque sous-simplexe. Ainsi, supposons que f est strictement positif sur Δ et que le degré de la triangulation standard est suffisamment grand pour que l'écart entre le graphe de f (sur les grilles de Gréville) et les grilles de contrôle sur chaque simplexe soit plus petit que le minimum m de f sur Δ . Alors les coefficients de Bernstein de f de degré d sur chacun des sous-simplexe sont positifs ou nuls, et d'après la propriété d'interpolation au sommets, ils vérifient le certificat de positivité de degré d sur chacun des sous-simplexes.

Définition 5.6.

Soit $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ un polynôme de degré d , et $T(\Delta) = (U_1, \dots, U_l)$ une triangulation du simplexe standard Δ .

Si f vérifie les certificats de positivité $\text{Cert}(b(f, d, U_i))$ pour tout $i = 1, \dots, l$, on dit que f vérifie le certificat de positivité local associé à la triangulation $U_1 \cup \dots, U_l$, que l'on note $\text{Cert}(b(f, d, T(\Delta)))$.

On a alors le théorème :

Théorème 5.7. Soit $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ un polynôme de degré d , strictement positif sur le simplexe standard Δ . Soit m le minimum de f sur Δ . Soit enfin $N \in \mathbb{N}^*$ un entier et $T_{2^N}(\Delta)$ la triangulation standard de degré 2^N du simplexe standard.

Si $2^N > \frac{\sqrt{dk(k+2)}\sqrt{k(k+1)(k+3)}}{24\sqrt{m}} \sqrt{\|\Delta^2 b(f, d, \Delta)\|_\infty}$, alors f vérifie le certificat de positivité local associé à $T_{2^N}(\Delta)$.

Preuve :

Il suffit de montrer que $\max_{|\alpha|=d} |f(N_\alpha) - b_\alpha(f, d, U)| \leq m$ sur chaque simplexe U de la triangulation standard $T_{2^N}(\Delta)$.

Le corollaire 3.10 affirme que

$$\max_{|\alpha|=d} |f(N_\alpha) - b_\alpha(f, d, U)| \leq \frac{dk^3(k+1)(k+2)^2(k+3)}{24^2 \cdot 2^{2N}} \|\Delta^2 b(f, d, \Delta)\|_\infty,$$

ce qui permet alors de conclure. ■

5.4 Algorithme pour le calcul de certificats de positivité

Regroupant les résultats des théorèmes 5.7 et 6.1, on dispose alors de l'algorithme suivant :

Algorithme 5 Certificat de positivité local

ENTRÉES:

- une liste $b = (b_\alpha)_{|\alpha|=d}$ représentant un polynôme $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ de degré $\leq d$ dans la base de Bernstein associée au simplexe standard Δ de \mathbb{R}^k

SORTIES:

- une triangulation $T(\Delta)$ et un certificat de positivité local associé à $T(\Delta)$ si f est strictement positif sur Δ
- un couple $(x, f(x))$ avec $x \in \Delta$ et $f(x) < m_{d,\tau}$ sinon, où $m_{d,\tau}$ est la borne sur le minimum obtenue dans le théorème 4.11.

Initialisation :

$N := 0$

$V := ((\Delta, B, N))$

$T := \emptyset$

si *Cert*(b) **alors**

Retourner (Δ, b)

fin

Calculer $\|\Delta^2 b(f, d, \Delta)\|_\infty$.

Calculer $m_{d,\tau}$ à l'aide de la formule du théorème 4.11.

tantque $V \neq \emptyset$ et $2^N \leq \frac{\sqrt{dk(k+2)}\sqrt{k(k+1)(k+3)}}{24\sqrt{m_{d,\tau}}} \sqrt{\|\Delta^2 b(f, d, \Delta)\|_\infty}$ **faire**

Prendre le premier élément (U, c, n) de V , avec $U = [u_0, \dots, u_k]$, $c = (c_\alpha)_{|\alpha|=d}$ et $n \geq 0$, et l'enlever de V .

pour i de 0 à k **faire**

si $c_{de_i}(f, d, U) \leq 0$ **alors**

Retourner $(u_i, f(u_i))$.

fin

fin pour

si *Cert*(c) **alors**

Rajouter (U, c) à T

sinon

Calculer la triangulation standard $T_2(U) : T_2(U) = (U_1, \dots, U_{2^k})$.

Calculer les coefficients de Bernstein $c^{(i)} = b(f, d, U_i)$ de f sur chaque simplexe U_i .

Rajouter les triplets $(U_i, c^{(i)}, n+1)$ à la fin de la liste V .

fin

Prendre le premier élément (U, c, n) de V

$N := n$

fin tantque

si $V = \emptyset$ **alors**

retourner T .

sinon

Prendre le premier élément (U, c, n) de V , avec $U = [u_0, \dots, u_k]$.

pour i de 0 à k **faire**

si $c_{de_i} = 0$ **alors**

Retourner $(u_i, f(u_i))$.

finsi

fin pour

Trouver α tel que $|\alpha| = d$ et $c_\alpha < 0$.

Calculer $N_\alpha := \frac{\alpha_0 u_0 + \dots + \alpha_k u_k}{d}$.

Retourner $(N_\alpha, f(N_\alpha))$.

finsi

Remarque : Le calcul des coefficients de Bernstein de f sur les simplexes des triangulations standard de degré 2 est possible en utilisant le corollaire 2.17.

Dans le cas le pire, tous les simplexes ont été triangulés, et la triangulation obtenue est la triangulation standard $T_{2^N}(\Delta)$, où N est le plus petit entier tel que

$$2^N \geq \frac{\sqrt{dk(k+2)}\sqrt{k(k+1)(k+3)}}{24\sqrt{m_{d,\tau}}} \sqrt{\|\Delta^2 b(f, d, \Delta)\|_\infty},$$

et où $m_{d,\tau}$ est la borne sur le minimum obtenue dans le théorème 4.11.

Une telle triangulation possède 2^{Nk} simplexes.

Correction de l'algorithme :

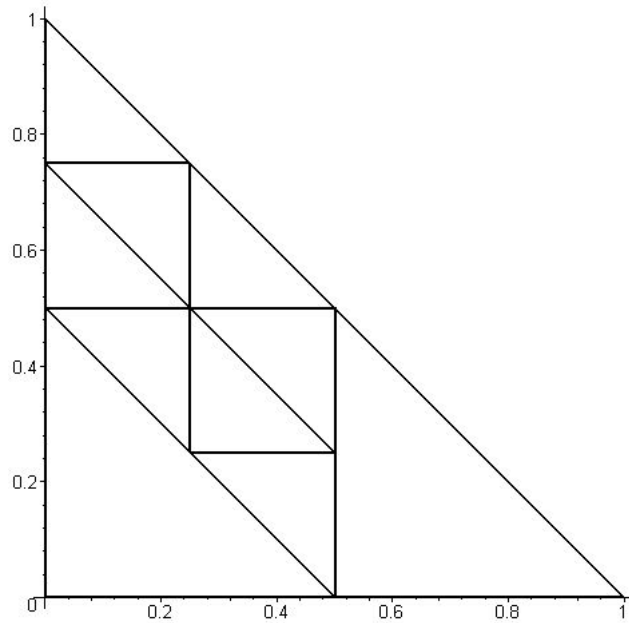
La correction de l'algorithme découle immédiatement des théorèmes 5.7 et 6.1 et du calcul des triangulations standard de degré 2^N découlant de la proposition 2.15. ■

Remarque : En pratique, on peut utiliser d'autres techniques de subdivision au lieu de la triangulation standard de degré 2. Il est nécessaire pour cela de faire baisser le diamètre à chaque étape. On peut par exemple couper les simplexes en 2, en coupant leur plus grande arête en son milieu.

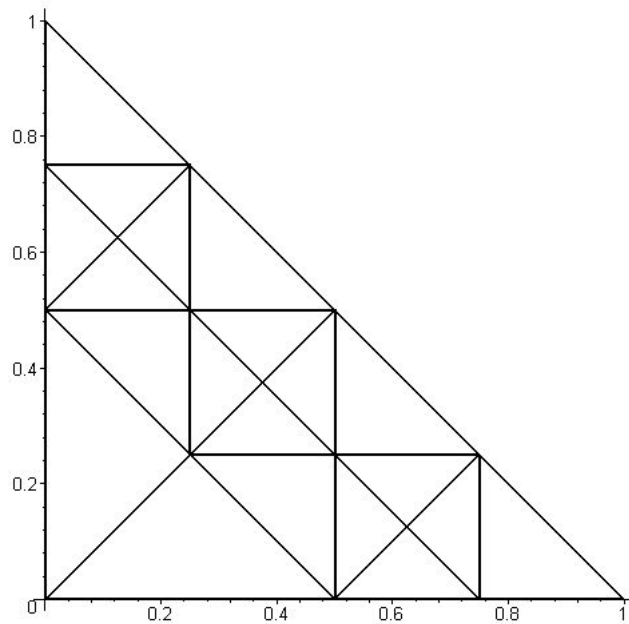
Les exemples suivants, pour des polynômes de degré 4 en 2 variables et positifs sur Δ , comparent les deux méthodes.

Exemple 5.8. $f_1 = 25x_1^4 + 20x_1^3x_2 + 14x_1^2x_2^2 + 4x_1x_2^3 + x_2^4 + 20x_1^3 + 28x_1^2x_2 + 12x_1x_2^2 + 4x_2^3 - 16x_1^2 - 8x_1 - 8x_2 + 25/6$.

L'algorithme basé sur les triangulations standard de degré 2 fournit un certificat impliquant 13 sous-simplexes, représentés dans la figure suivante :

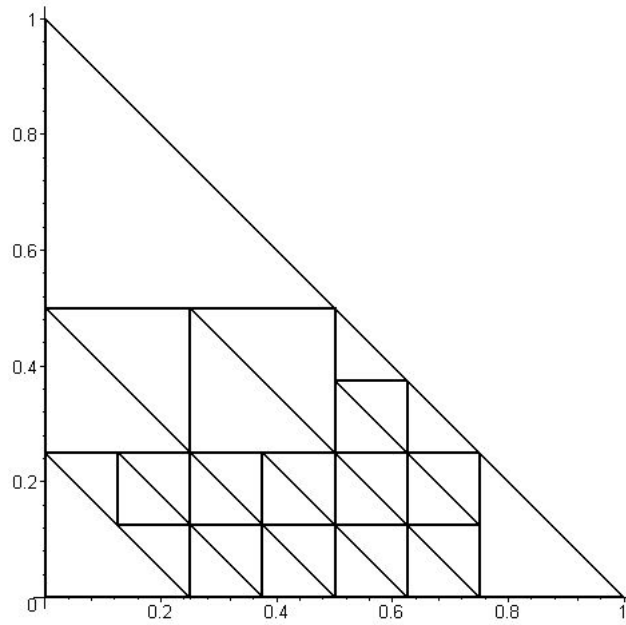


En coupant selon la plus grande arête, on obtient un certificat de positivité impliquant 20 simplexes :

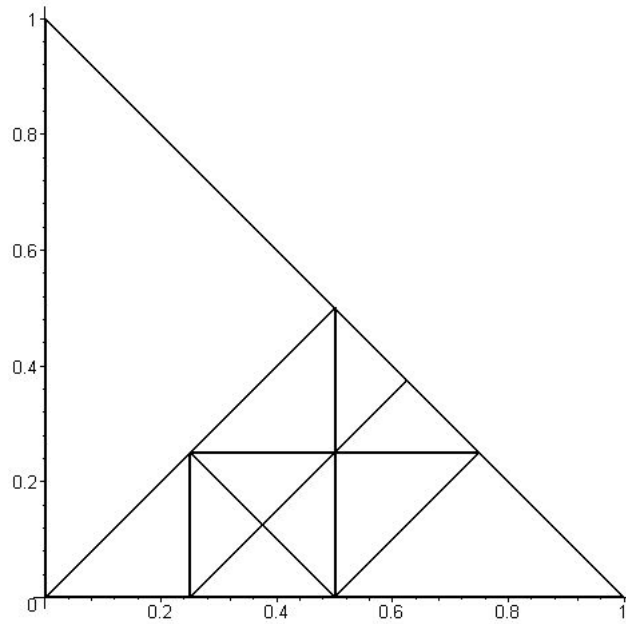


Exemple 5.9. $f_2 = x_2^4 x_2^4 - 4x_1^4 x_2^3 + 4x_1^2 x_2^5 + 8x_1^4 x_2^2 - 8x_1^2 x_2^4 + 4x_2^6 - 8x_1^4 x_2 + 4x_1^2 x_2^3 + 4x_1^4 + 8x_1^2 x_2^2 - 8x_2^4 - 8x_1^2 x_2 + 4x_2^2 + 1/100$.

L'algorithme basé sur les triangulations standard de degré 2 fournit un certificat impliquant 31 sous-simplexes, représentés dans la figure suivante :

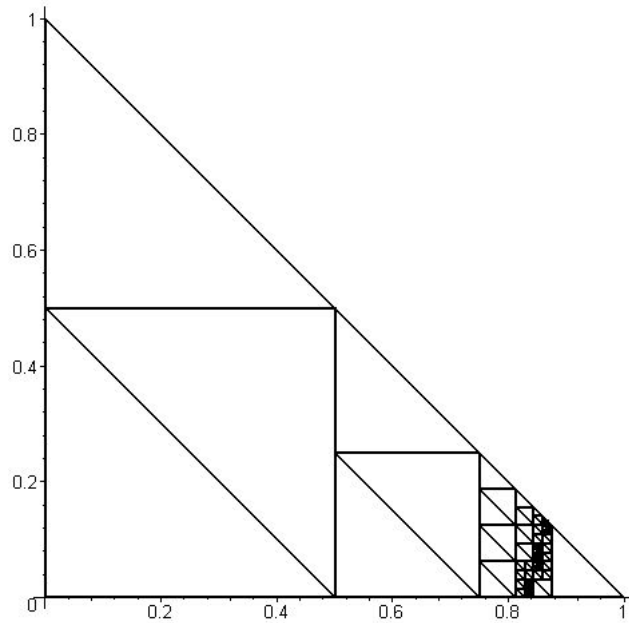


En coupant selon la plus grande arête, on obtient un certificat de positivité impliquant 11 simplexes :

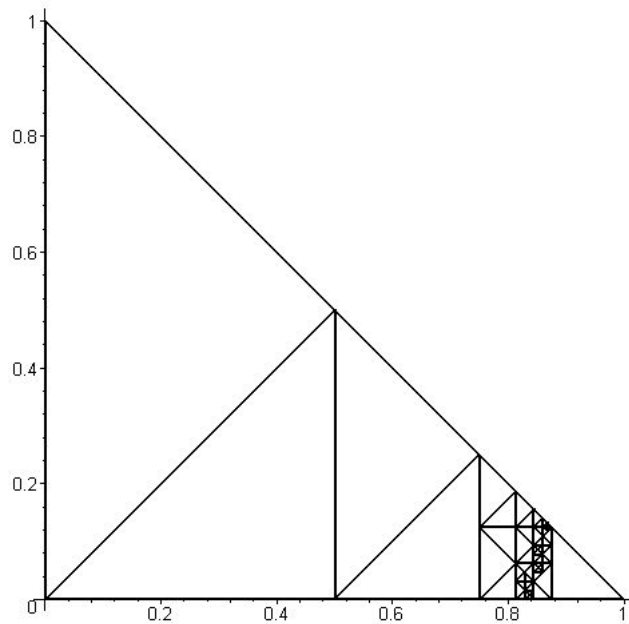


Exemple 5.10. $f_3 = 2401x_1^4 - 1078x_1^3x_2 - 8993x_1^2x_2^2 + 2046x_1x_2^3 + 8649x_2^4 + 3822x_1^3 - 1642x_1^2x_2 - 7078x_1x_2^2 + 1488x_2^3 - 5045x_1^2 + 850x_1x_2 + 12526x_2^2 - 5226x_1 + 1072x_2 + 35913/8$.

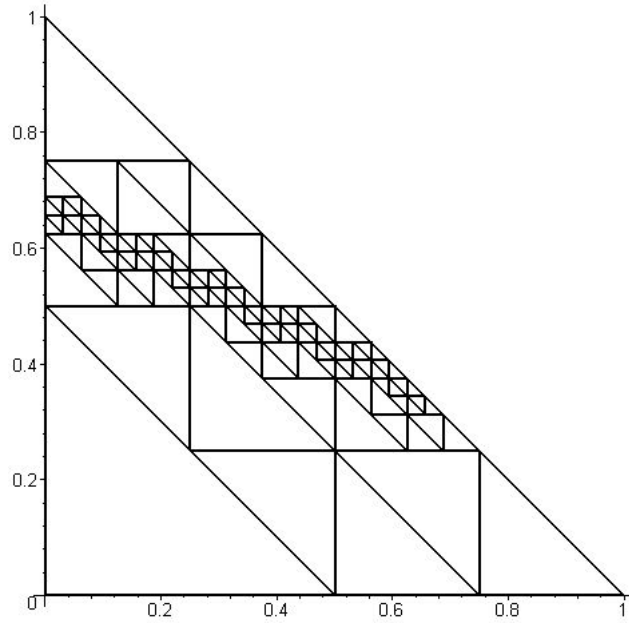
L'algorithme basé sur les triangulations standard de degré 2 fournit un certificat impliquant 106 sous-simplexes, représentés dans la figure suivante :



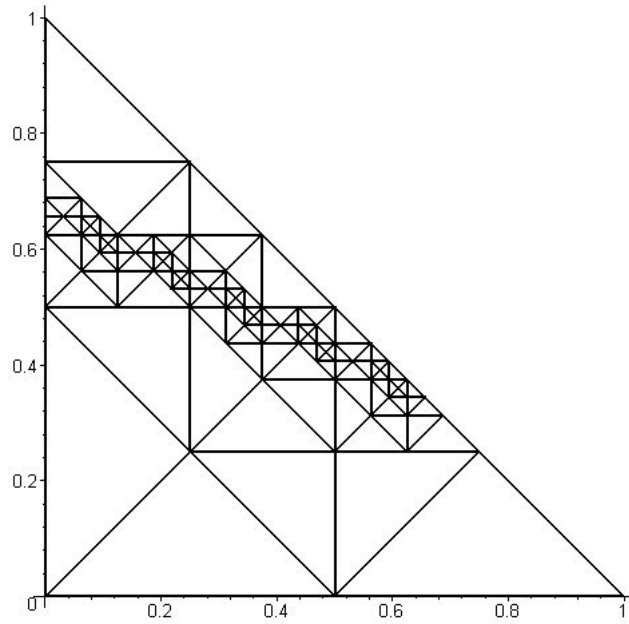
En coupant selon la plus grande arête, on obtient un certificat de positivité impliquant 59 simplexes :



Exemple 5.11. $f_4 = 625x_1^2 + 2550x_1x_2 + 2601x_2^2 - 1700x_1 - 3468x_2 + 9249/8$.
 L'algorithme basé sur les triangulations standard de degré 2 fournit un certificat impliquant 124 sous-simplexes, représentés dans la figure suivante :



En coupant selon la plus grande arête, on obtient un certificat de positivité impliquant 138 simplexes :



Remarque : Les exemples précédents montrent qu'en dimension 2, les deux méthodes sont comparables. En coupant selon l'arête la plus grande, on divise par $\sqrt{2}$ le diamètre des simplexes considérés. De plus, ce faisant, les simplexes générés gardent la géométrie du triangle standard. Ceci n'est plus vrai en dimension supérieure.

Remarque : L'algorithme précédent a l'avantage de s'adapter à la géométrie du polynôme f . Si f vérifie le certificat de positivité sur un sous-simplexe de la triangulation, alors celui-ci n'est pas subdivisé. La subdivision n'est fine (au sens où le diamètre des simplexes est petit) qu'aux endroits

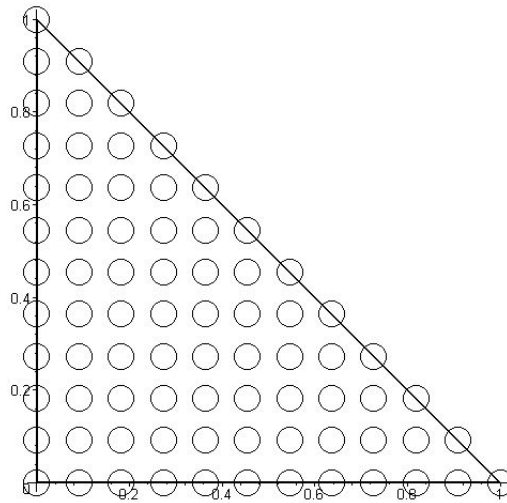
où le polynôme f est petit.

Il s'agit d'une différence importante avec la technique d'élévation du degré, qui raffine globalement la grille de contrôle et qui par conséquent produit plus de points de contrôle en général.

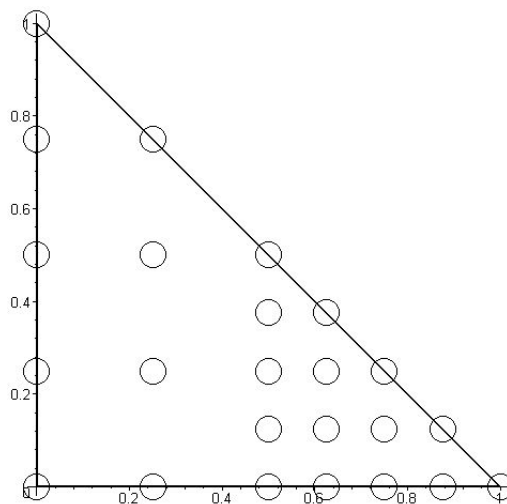
Exemple 5.12. On considère le polynôme

$$f = 5 - 16x_1 + 12x_2 + 16x_1^2 - 24x_1x_2 + 9x_2^2 = (2 - 4x_1 + 3x_2)^2 + 1.$$

Le premier degré d pour lequel f vérifie le certificat de positivité $\text{Cert}(b(f, d, \Delta))$ est $d = 11$. Cela correspond à la grille de Gréville suivante :



La méthode par triangulations standard de degré 2 successives donne quant à elle les points des grilles de Gréville de degré 2 suivantes :



Remarque : On pourrait également choisir d'autres conditions suffisantes de positivité plus fines, comme par exemple ([H]) :

Théorème 5.13. Soit $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ de degré d sur un simplexe non dégénéré V , et de coefficients de Bernstein b_α ($|\alpha| = d$).

On définit l'ensemble A suivant :

$$A = \{\alpha \mid |\alpha| = d, \alpha \neq de_0, \dots, de_k, b_\alpha < 0\}.$$

Si f vérifie

- soit $\forall i = 0, \dots, k, b_{de_i} + (d-1)! \sum_{\alpha \in A} \frac{\alpha_i}{\alpha!} b_\alpha > 0$

- soit $\forall i = 0, \dots, k, b_{de_i} + (d-1)! \sum_{\alpha \in A} \left(\frac{k+1}{d}\right)^{d-1} \frac{\alpha_i^d}{\alpha!} b_\alpha > 0.$

Alors f est strictement positif sur V .

Ce critère de positivité autorise par conséquent les coefficients de Bernstein d'un polynôme positif à être négatifs, dans la mesure où ils sont compensés selon l'une des deux conditions du théorème précédent.

Minimisation polynomiale sur le simplexe standard

Ce chapitre aborde le problème de la minimisation polynomiale sur le simplexe standard Δ . Il s'agit d'un problème classique, aux applications variées (eg. dynamique des populations, cinétique chimique, théorie des graphes, cf [KLS]).

Celui-ci étant compact, tout polynôme $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ atteint son minimum m sur Δ . Deux problèmes algorithmiques apparaissent alors : calculer le minimum m (ou tout du moins en donner un encadrement avec la précision souhaitée), et localiser les minimiseurs de f sur Δ , c'est à dire les points $x \in \mathbb{R}^k$ tels que $f(x) = m$. Les algorithmes présentés ici offre une réponse à ces problèmes.

6.1 Encadrement du minimum

Soit $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ un polynôme de degré d , et $V = [V_0, \dots, V_k] \subset \mathbb{R}^k$ un simplexe de dimension k . On considère la base de Bernstein $(B_\alpha^d)_{|\alpha|=d}$ associée à V et la liste $(b_\alpha)_{|\alpha|=d}$ des coefficients de Bernstein de f sur V :

$$f = \sum_{|\alpha|=d} b_\alpha B_\alpha^d.$$

L'objet de cette section est de donner un encadrement du minimum $\min_V f$ de f sur V .

Le principe est de raffiner l'encadrement 1.4

$$\forall x \in V, \min_{|\alpha|=d} b_\alpha \leq f(x) \leq \max_{|\alpha|=d} b_\alpha.$$

Si β désigne un multi-indice tel que $\min_{|\alpha|=d} b_\alpha = b_\beta$, on considère le point de de la grille de Gréville associé

$$N_\beta = \frac{\beta_0 V_0 + \dots + \beta_k V_k}{d}.$$

La propriété (1.2) d'interpolation aux sommets affirme que

$$\forall i \in \{0, \dots, k\}, b_{de_i} = f(V_i).$$

On obtient alors l'encadrement suivant :

$$b_\beta \leq \min_V f \leq \min(f(N_\beta), b_{de_0}, \dots, b_{de_k}). \quad (6.1)$$

6.2 Algorithme de minimisation

La mise en oeuvre algorithmique de la minimisation polynomiale sur le simplexe standard Δ est étudiée dans cette section.

Le principe est de procéder à des triangulations standard de degré 2 successives du simplexe standard Δ . Si V désigne un simplexe de la triangulation de degré 2^N de Δ , la section précédente fournit l'encadrement

$$b_\beta \leq \min_V f \leq \min (f(N_\beta), b_{de_0}, \dots, b_{de_k}).$$

D'après le corollaire 3.10, la précision de l'encadrement précédent est bornée de la manière suivante :

$$\min (f(N_\beta), b_{de_0}, \dots, b_{de_k}) - b_\beta \leq \max_{|\alpha|=d} |f(N_\alpha) - b_\alpha| \leq \frac{dk^3(k+1)(k+2)^2(k+3)}{24^2 \cdot 2^{2N}} \|\Delta^2 b(f, d, \Delta)\|_\infty.$$

Le majorant précédent tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$, et l'on peut donc, après triangulations successives, donner un encadrement du minimum avec une précision aussi petite que l'on souhaite.

Ceci justifie l'algorithme suivant :

Algorithme 6 Minimisation sur le simplexe standard (tous les minimiseurs)

ENTRÉES: une liste $B = (B_\alpha)_{|\alpha|=d}$ représentant un polynôme f de degré d dans la base de Bernstein associée au simplexe standard Δ , et une précision ε .

SORTIES: une collection de sous-simplexes V_i (éventuellement réduits à un point), contenant tous les minimiseurs de f sur Δ , munis d'un encadrement de $\min f$ sur chacun de ces sous-simplexes de précision $< \varepsilon$.

Initialisation :

$Inf := \min(B_\alpha)$.

$L := \{(\Delta, B, Inf)\}$.

$sol := \emptyset$.

Déterminer un multi-indice β vérifiant $B_\beta = Inf$.

Calculer le point de la grille de Gréville associé N_β , et calculer $f(N_\beta)$.

Calculer $val := \min(f(N_\beta), B_{de_0}, \dots, B_{de_k})$.

tantque $L \neq \emptyset$ **faire**

Prendre un élément (v, b, inf) de L , et l'enlever de L .

si $|inf - val| = 0$ **alors**

Trouver un sommet s de v vérifiant $inf = f(s)$.

Ajouter (s, inf) à sol .

sinon si $|inf - val| < \varepsilon$ **alors**

Ajouter (v, inf) à sol .

sinon

Calculer la triangulation standard (u_0, \dots, u_{2^k}) de degré 2 de v .

Calculer les coefficients de Bernstein $b_\alpha^{(i)}$ de f sur les simplexes u_i

Calculer les quantités $inf^{(i)} = \min_\alpha(b_\alpha^{(i)})$

Pour chaque simplexe u_i , déterminer un multi-indice β vérifiant $b_\beta^{(i)} = inf^{(i)}$.

Calculer la valeur $f^{(i)} := f(N_\beta^{(i)})$ de f aux points de la grille de Gréville associés.

Calculer les quantités $val^{(i)} = \min_j \left(\min_j(b_{de_j}^{(i)}), f^{(i)} \right)$.

Mettre à jour $val = \min(val, val^{(1)}, \dots, val^{(2^k)})$.

Ajouter les $(v^{(i)}, b^{(i)}, inf^{(i)})$ à L .

finsi**fin tantque**

Éliminer dans sol tous les éléments (s, inf) ou (v, inf) vérifiant $inf > val$.

Retourner les triplets (s, inf, val) et (v, inf, val) où (s, inf) et (v, inf) parcourent sol .

Remarque : Les triplets de la forme (s, inf, val) obtenus vérifient de manière immédiate $inf = val = f(s)$.

On obtient facilement la

Proposition 6.1. Avec les notations précédentes, et si N est le plus petit entier vérifiant

$$\frac{dk^3(k+1)(k+2)^2(k+3)}{24^2 \cdot 2^{2N}} \|\Delta^2 b(f, d, \Delta)\|_\infty < \varepsilon,$$

alors au plus N triangulations standard de degré 2 sont nécessaires pour obtenir une précision de l'encadrement du minimum $< \varepsilon$ sur chaque simplexe.

Preuve :

Elle découle immédiatement du corollaire 3.10. ■

Preuve (correction de l'algorithme) :

C'est un corollaire immédiat de la proposition précédente. ■

Exemple 6.2. $f = -2x_1^2x_2 + 6x_1^5 + 4x_1^4x_2 - 3x_1^6 + 3x_1^3x_2^3 + 5x_2^6$

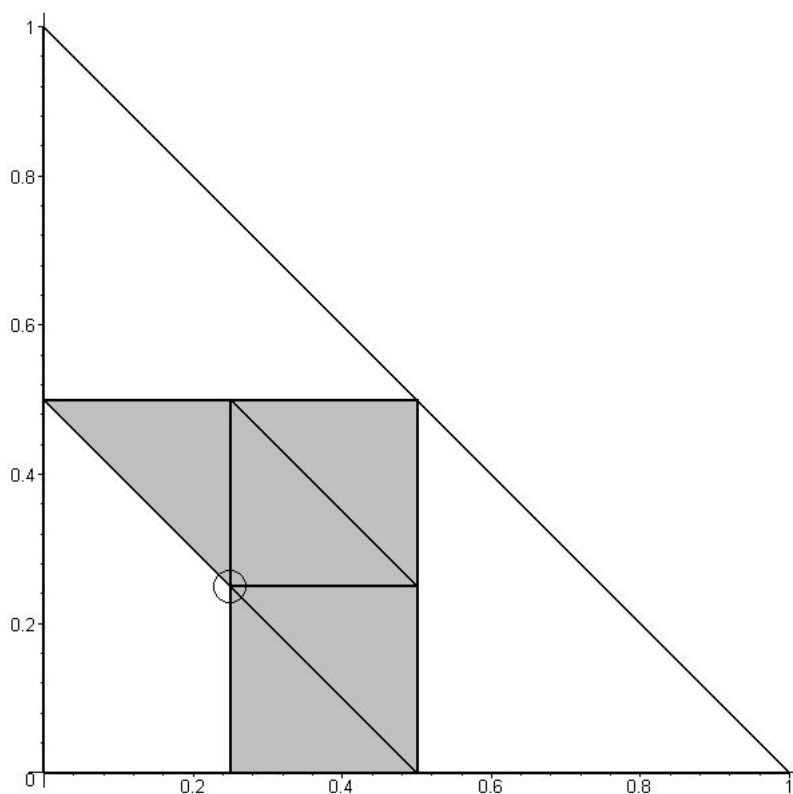
L'algorithme de minimisation, appliqué à f , sur le simplexe standard de \mathbb{R}^2 et avec une précision de $\frac{1}{100}$ fournit l'encadrement

$$-73277/2293760 \leq m \leq -26834291/1073741824$$

(soit approximativement $-0,03194623675 \leq m \leq -0,02499138098$), et localise les minimiseurs dans la liste des simplexes et du point représentés dans la figure suivante.

Le temps de calcul est de 0,657 seconde.

Les calculs ont été effectués sur un AMD Turion(tm) 64 × 2 Mobile 1.60 Ghz avec 2 Go de Ram, opérant sous Windows XP Professionnal.

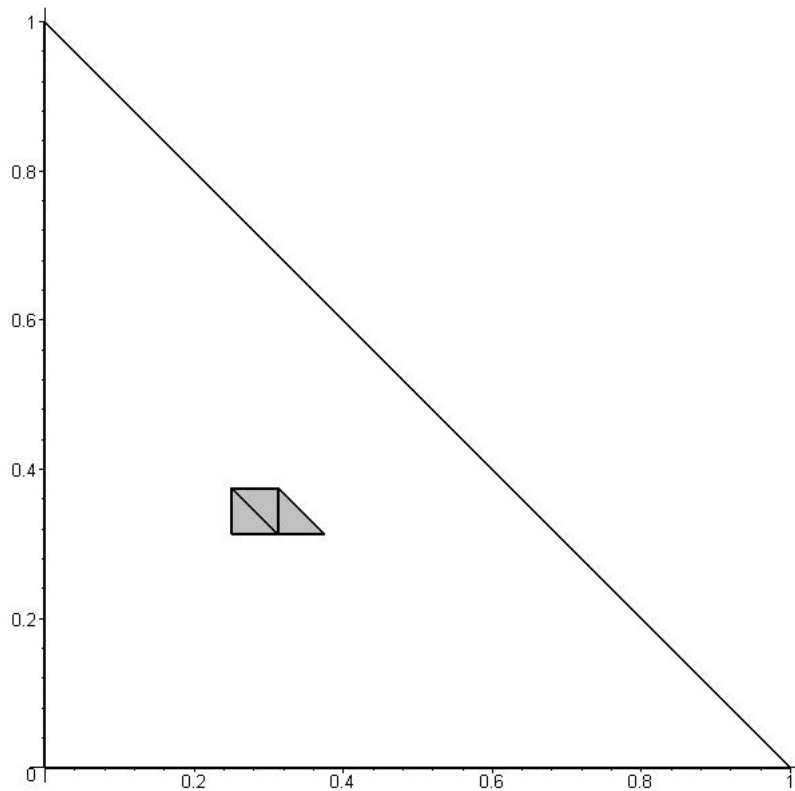


Avec une précision 1/1000, on obtient l'encadrement

$$-12771275/469762048 \leq m \leq -118895751463/4398046511104$$

(soit approximativement $0,02718668963 \leq m \leq 0,02703376400$), et les minimiseurs sont localisés dans les simplexes représentés dans la figure suivante.

Le temps de calcul est de 1,735 seconde.



6.3 Variantes de l'algorithme

6.3.1 Encadrement du minimum avec localisation d'un seul minimiseur

L'algorithme précédent localise tous les minimiseurs de f sur V . Si l'on ne cherche qu'un minimiseur de f (ou juste un encadrement du minimum), on peut simplifier l'algorithme de la façon suivante : on ne considère à chaque étape que le sous-simplexe dont le coefficient de Bernstein le plus petit est minimal. L'algorithme s'arrête si l'on a obtenu la précision souhaitée sur ce sous-simplexe. Sinon, on procède à une triangulation standard de degré 2, et on considère à nouveau le sous-simplexe de plus petit coefficient de Bernstein minimal, jusqu'à obtenir la précision souhaitée.

Algorithme 7 Minimisation sur le simplexe standard (un seul minimiseur)

ENTRÉES: une liste $B = (B_\alpha)_{|\alpha|=d}$ représentant un polynôme f de degré d dans la base de Bernstein associée au simplexe standard Δ , et une précision ε .

SORTIES: un encadrement de $\min_{\Delta} f$ de précision $< \varepsilon$, et un sous-simplexe V (éventuellement réduit à un point) vérifiant

$$\min_V f - \min_{\Delta} f < \varepsilon.$$

Initialisation :

$$Inf := \min_{\alpha} (B_{\alpha}).$$

Déterminer un multi-indice β vérifiant $B_{\beta} = Inf$.

Calculer le point de la grille de Gréville associé N_{β} , et calculer $f(N_{\beta})$.

Calculer $val := \min(f(N_{\beta}), B_{de_0}, \dots, B_{de_k})$.

$$L := \{(\Delta, B, Inf)\}.$$

tantque $L \neq \emptyset$ **faire**

Prendre le premier élément (v, b, inf) de L , et l'enlever de L .

si $|inf - val| = 0$ **alors**

Trouver un sommet s de v vérifiant $inf = f(s)$.

Retourner (inf, inf, s) .

sinon si $|inf - val| < \varepsilon$ **alors**

Retourner (inf, val, v) .

sinon

Calculer la triangulation standard (u_0, \dots, u_{2^k}) de degré 2 de v .

Calculer les coefficients de Bernstein $b_{\alpha}^{(i)}$ de f sur les simplexes u_i .

Calculer les quantités $inf^{(i)} = \min_{\alpha} (b_{\alpha}^{(i)})$.

Pour chaque simplexe u_i , déterminer un multi-indice β vérifiant $b_{\beta}^{(i)} = inf^{(i)}$.

Calculer la valeur $f^{(i)} := f(N_{\beta}^{(i)})$ de f aux points de la grille de Gréville associés.

Calculer les quantités $val^{(i)} = \min_j \left(\min(b_{de_j}^{(i)}), f^{(i)} \right)$.

Mettre à jour $val = \min(val, val^{(1)}, \dots, val^{(2^k)})$.

Ajouter les $(v^{(i)}, b^{(i)}, inf^{(i)})$ à L dans l'ordre croissant des $inf^{(i)}$.

finsi

fin tantque

Remarque : Si l'algorithme précédent retourne un triplet (inf, inf, s) , on a alors de manière exacte

$$\min_{\Delta}(f) = inf = f(s).$$

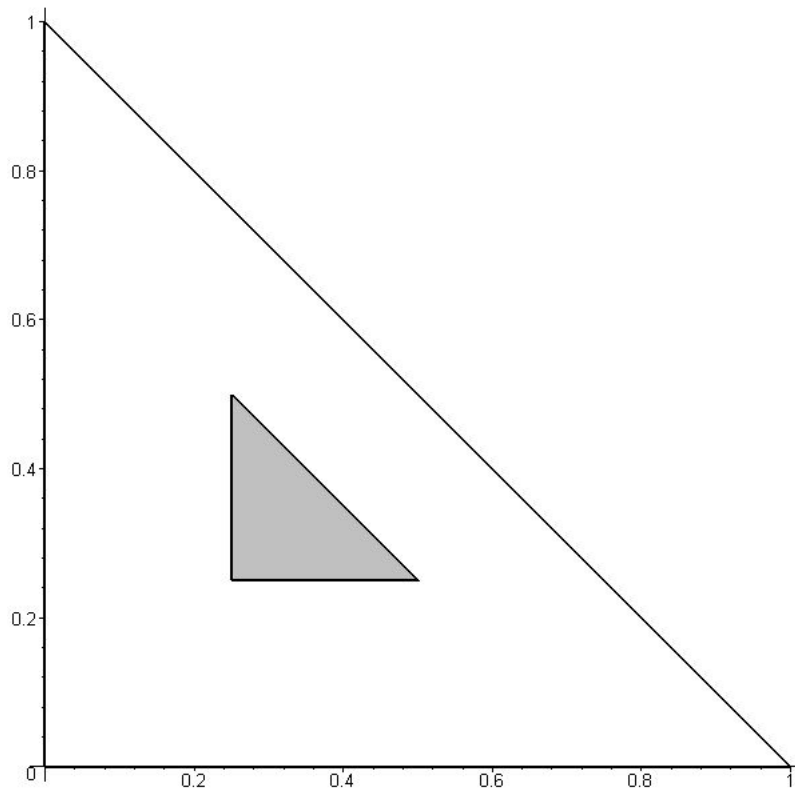
Exemple 6.3. On reprend l'exemple de la section précédente : $f = -2x_1^2x_2 + 6x_1^5 + 4x_1^4x_2 - 3x_1^6 + 3x_1^3x_2^3 + 5x_2^6$.

L'algorithme de minimisation, appliqué à f , sur le simplexe standard de \mathbb{R}^2 et avec une précision de $\frac{1}{100}$ fournit l'encadrement

$$-73277/2293760 \leq m \leq -26834291/1073741824$$

(soit approximativement $-0,03194623675 \leq m \leq -0,02499138098$), et localise les minimiseurs dans le simplexe représenté dans la figure suivante.

Le temps de calcul est de 0,469 seconde.



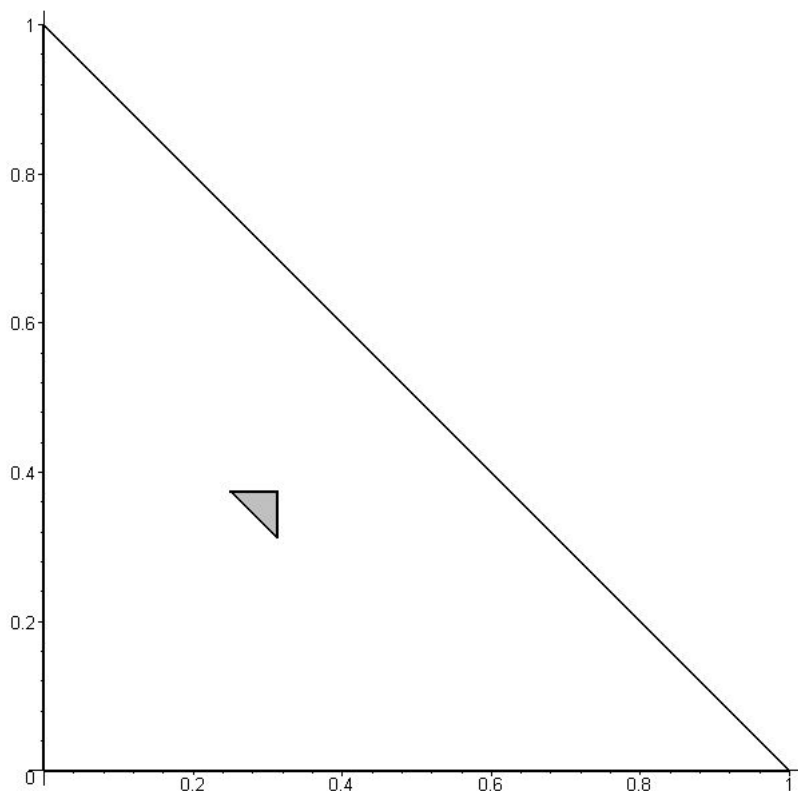
6.3 Variantes de l'algorithme

Avec une précision 1/1000, on obtient l'encadrement

$$-1830965/67108864 \leq m \leq -118895751463/4398046511104$$

(soit approximativement $-0,02728350461 \leq m \leq -0,02703376400$), et un minimiseur est localisé dans le simplexe représenté dans la figure suivante.

Le temps de calcul est de 1,093 seconde.



6.3.2 Subdivision à l'aide de l'algorithme de De Casteljaou aux points de la grille de Gréville

Le calcul de la valeur de f au point de la grille de Gréville N_β d'un simplexe $V = [V_0, \dots, V_k]$ peut être effectué à l'aide de l'algorithme de De Casteljaou. Dans ce cas, le point N_β définit une triangulation de V formée des k simplexes

$$V^{(i)} = [V_0, \dots, V_{i-1}, N_\beta, V_{i+1}, \dots, V_k].$$

On peut alors rajouter immédiatement les simplexes de cette triangulation à L , et les trianguler alors à l'aide de triangulations standard de degré 2.

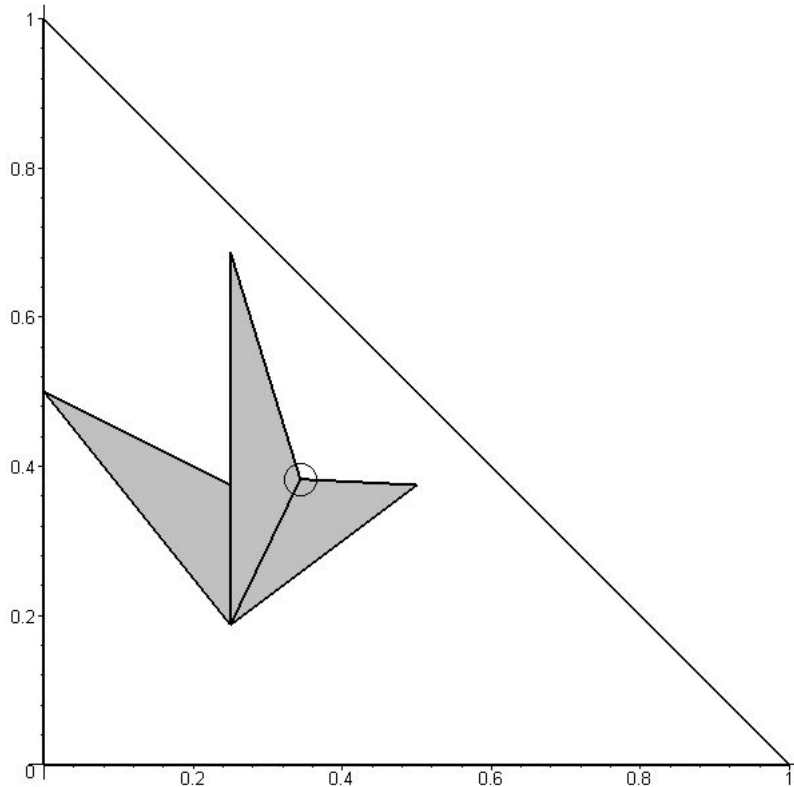
Exemple 6.4. On reprend encore l'exemple de la section précédente : $f = -2x_1^2x_2 + 6x_1^5 + 4x_1^4x_2 - 3x_1^6 + 3x_1^3x_2^3 + 5x_2^6$.

L'algorithme de minimisation, appliqué à f , sur le simplexe standard de \mathbb{R}^2 et avec une précision de $\frac{1}{100}$ fournit l'encadrement

$$-4157777491/137438953472 \leq m \leq -99697630491/4398046511104$$

(soit approximativement $-0,03025181279 \leq m \leq -0,02266861668$), et localise les minimiseurs dans la liste des simplexes et du point représentés dans la figure suivante.

Le temps de calcul est de 0,520 seconde.



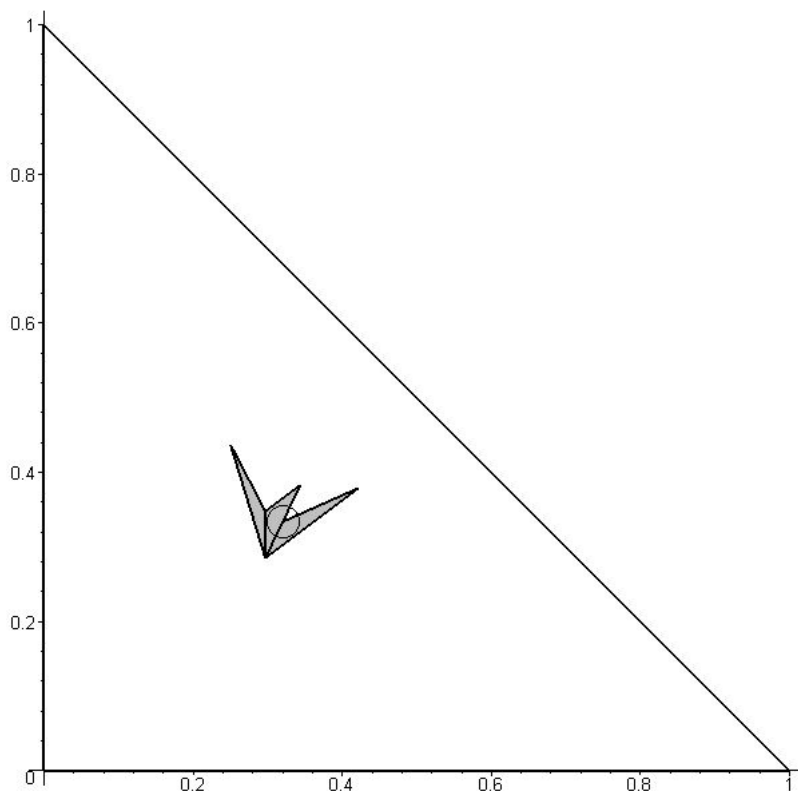
6.3 Variantes de l'algorithme

Avec une précision 1/1000, on obtient l'encadrement

$$-1830965/67108864 \leq m \leq -118895751463/4398046511104$$

(soit approximativement $-0,02736915428 \leq m \leq -0,02686704612$), et localise les minimiseurs dans la liste des simplexes et du point représentés dans la figure suivante.

Le temps de calcul est de 1,375 seconde.



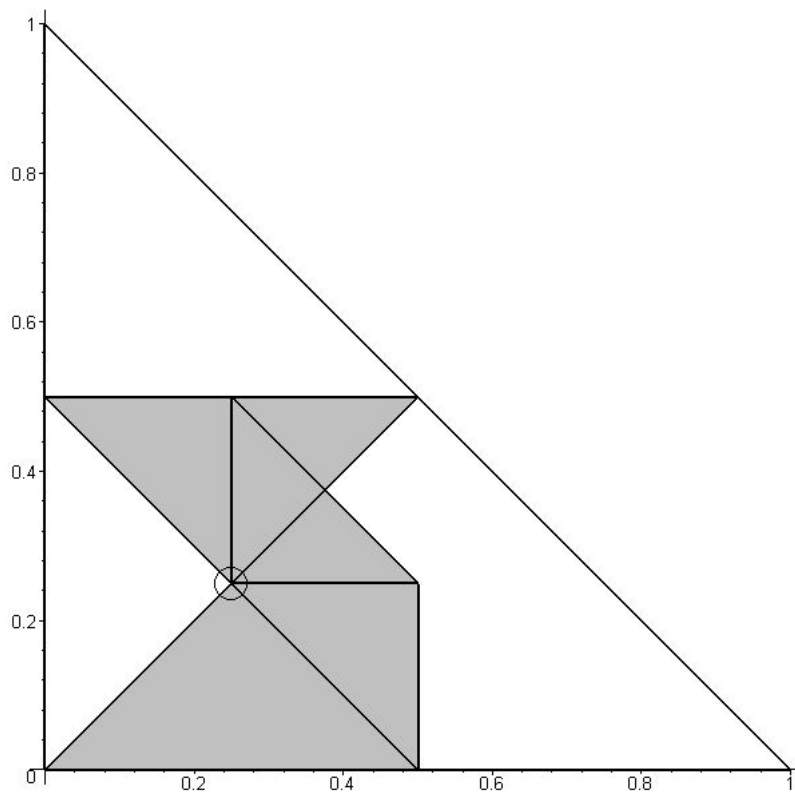
6.3.3 Subdivision à l'aide de l'algorithme de De Casteljau sur une arête

Enfin, comme pour le calcul de certificats de positivité, on peut utiliser à chaque étape une subdivision en coupant selon une arête de plus grand diamètre au lieu d'effectuer une triangulation standard de degré 2.

Exemple 6.5. On reprend encore l'exemple de la section précédente : $f = -2x_1^2x_2 + 6x_1^5 + 4x_1^4x_2 - 3x_1^6 + 3x_1^3x_2^3 + 5x_2^6$.

L'algorithme de minimisation, appliqué à f , sur le simplexe standard de \mathbb{R}^2 et avec une précision de $\frac{1}{100}$ fournit l'encadrement $-528737/18350080 \leq m \leq -83/4096$ (soit approximativement $-0,02881387983 \leq m \leq -0,02026367188$), et localise les minimiseurs dans la liste des simplexes et du point représentés dans la figure suivante.

Le temps de calcul est de 0,438 seconde.

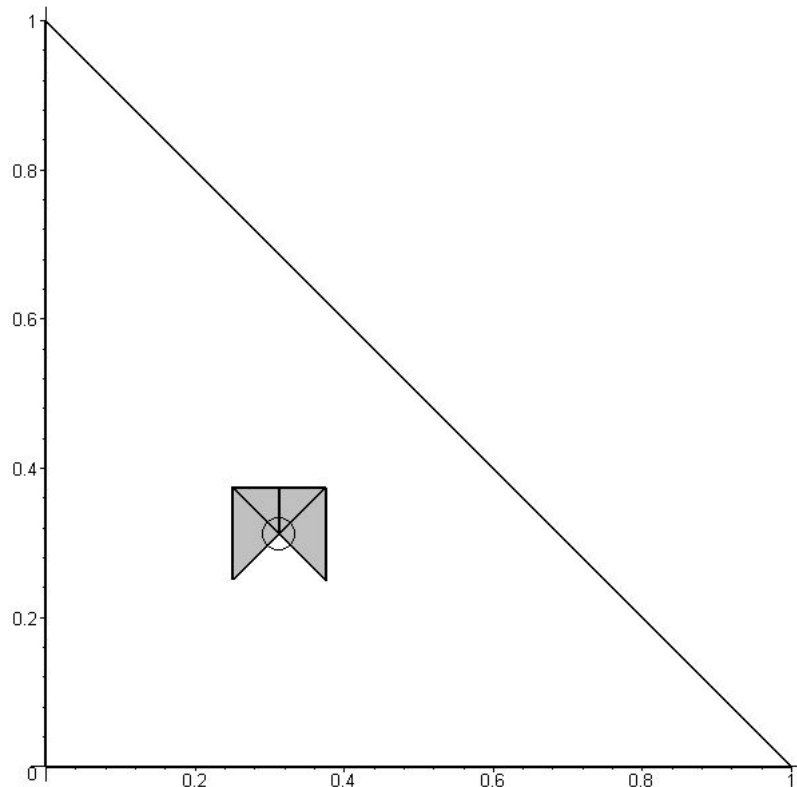


Avec une précision 1/1000, on obtient l'encadrement

$$-1830965/67108864 \leq m \leq -445875/16777216$$

(soit approximativement $-0,02728350461 \leq m \leq -0,02657622099$), et localise les minimiseurs dans la liste des simplexes et du point représentés dans la figure suivante.

Le temps de calcul est de 1,141 seconde.



6.4 Notes bibliographiques

Le problème de minimiser un polynôme réel sur un simplexe est un problème NP-dur quand le degré est supérieur ou égal à 2 ([KLS]). Les méthodes exactes, comme celles basées sur le calcul de bases de Gröbner ([HLS]), ont donc, en pratique, des limitations dues à leur complexité.

Parallèlement aux méthodes exactes, des algorithmes numériques existent pour résoudre ce genre de problème. Parmi eux, certains recherchent les optima locaux, *ie* les points vérifiant les conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker. L'algorithme de descente de gradient appartient par exemple à cette catégorie. Pour un état de l'art des techniques d'optimisation globale, mis à jour et disponible en ligne, on pourra se référer à [N].

On pourra également consulter [KLS], où les auteurs minimisent le polynôme sur les points rationnels du simplexe de dénominateur de plus en plus grand, fournissant ainsi une hiérarchie de bornes inférieures et supérieures convergeant vers le minimum recherché.

Récemment, les méthodes de programmation semidéfinie positive ([PH], [L]) ont permis de développer des algorithmes résolvant de manière approchée le problème d'optimisation polynomiale. Il s'agit alors d'approcher l'optimum global par une hiérarchie de relaxations semidéfinies.

Les méthodes numériques permettent d'approcher en un nombre polynomial d'opérations arithmétiques le minimum cherché. Il en est ainsi de logiciels basés sur la programmation semidéfinie positive, comme GloptiPoly ([G]). Cependant, l'utilisation de solveurs SDP (eg. Sedumi) peut entraîner des problèmes de stabilité et de précision numérique, et donc une incertitude sur les résultats obtenus.

A contrario, la méthode présentée dans ce chapitre est certifiée. De plus, le modèle de représentation des réels utilisé n'est pas le même, puisque les méthodes présentées ici permettent de travailler avec des modèles à précision infinie, contrairement aux nombres flottants utilisés dans les algorithmes numériques. Elles fournissent même, si le polynôme de départ est à coefficients rationnels, une sortie elle-même rationnelle, avec une évaluation des tailles binaires des numérateurs et dénominateurs. Dans le cas le pire, le gain de certitude se traduit par une complexité accrue.

Perspectives

Dans cette thèse sont présentés deux algorithmes certifiés, produisant des certificats de positivité ou minimisant un polynôme sur le simplexe standard. La preuve de leur correction a été menée, et une borne sur le nombre d'itérations nécessaires a été donnée.

Concernant les certificats de positivité, l'algorithme présenté ici est une généralisation du cas univarié, traité dans [BCR]. En une variable, l'avantage de la méthode de subdivision sur la méthode d'élévation de degré est clair : dans le premier cas, on obtient une complexité polynomiale, alors que dans le second, elle est exponentielle. Dans le cas multivarié, le caractère exponentiel de la borne sur la complexité est présent dans les deux méthodes, même si la technique de subdivision permet un gain d'un coefficient \sqrt{m} au dénominateur (où m est le minimum du polynôme considéré), et se révèle en pratique bien plus efficace. La différence entre les cas univarié et multivarié provient du manque d'un argument de sous-additivité dans le second cas. L'obtention d'un tel argument fait l'objet de recherches en cours, qui pourraient également s'appliquer au problème de minimisation polynomiale.

On peut également s'intéresser au cas d'un polynôme seulement positif (et pas strictement positif) sur le simplexe standard. Cela fait l'objet de recherches actuelles ([RP2], [MT]), menées à l'aide de la technique d'élévation du degré. La méthode de subdivision permettrait peut-être d'obtenir, à l'instar du cas strictement positif, de meilleures bornes.

Enfin, l'implémentation des algorithmes sous Maple et Maxima peut encore être améliorée, et le développement sous le nouveau logiciel Mathemagix ([M]) est l'objet d'un travail en cours.



Bibliographie

- [BCR] F. Boudaoud, F. Caruso, M.-F. Roy, Certificates of Positivity in the Bernstein Basis , Discrete and Computational Geometry, Volume 39, Number 4, 639-655 (2008)
- [BPR] S. Basu, R. Pollack, M.-F. Roy, Algorithms in Real Algebraic Geometry, Springer (2006), disponible en version électronique à l'adresse : <http://perso.univ-rennes1.fr/marie-francoise.roy/>
- [D] W. Dahmen, Subdivision algorithms converge quadratically, Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume 16 , Issue 2 , 145 - 158 (1986)
- [DM] W. Dahmen and C. A. Micchelli, Convexity of multivariate Bernstein polynomials and box spline surfaces, Stud. Sci. Math. Hung. 23 : 265-287 (1988)
- [F] G. Farin, Curves and surfaces for computer aided geometric design : a practical guide, Academic Press Professional (1988)
- [G] GloptiPoly 3 - moments, optimization and semidefinite programming, disponible à l'adresse : <http://www.laas.fr/~henrion/software/gloptipoly3/>
- [GP] T. Goodman, J. Peters, Bézier Nets, Convexity and Subdivision on Higher Dimensional Simplices, Computer Aided Geometric Design 12(1) : 53-65 (1995)
- [H] T.-X. He, Positivity and Convexity Criteria for Bernstein-Bézier Polynomials Over Simplices, Curves and Surfaces with Applications in CAGD, A. Le Méhauté, C. Rabut, and L.L. Schumaker (eds.), Vanderbilt University Press, Nashville : 169-176 (1997)
- [HLS] K. Hägglöf, P. O. Lindberg, L. Svensson, Computing global minima to polynomial optimization problems using Gröbner bases, Volume 7, Number 2 : 115-125 (1995)
- [KLS] E. de Klerk, M. Laurent, P. A. Parrilo, A PTAS for the minimization of polynomials of fixed degree over the simplex, Theoretical Computer Science, Volume 361, Issue 2 : 210 - 225 (2006)
- [L] J.B. Lasserre, Global optimization with polynomials and the problem of moments, SIAM. J.Optim., Volume 11, Issue 3 : 796 - 817 (2001)
- [LS] M.-J. Lay, L. Schumaker, Spline Functions on Triangulations (Encyclopedia of Mathematics and its Applications) , Cambridge University Press, (2007)

-
- [dLS] J. A. de Loera, F. Santos, An effective version of Pólya's theorem on positive definite forms, *Journal of Pure and Applied Algebra*, Volume 108, Issue 3, 231-240 (1996)
- [M] Welcome to Mathemagix, disponible à l'adresse :
<http://www.mathemagix.org/www/main/index.en.html>
- [MT] H.-N. Mok, W.-K. To, Effective Polya semi-positivity for non-negative polynomials on the simplex, *J. of Complexity*, Volume 24, Issue 4 (2008)
- [N] A. Neumaier, Global optimization, disponible en ligne à l'adresse :
www.mat.univie.ac.at/~neum/glopt.html
- [NPL] D. Nairn, J. Peters, D. Lutterkort, Sharp, quantitative bounds on the distance between a polynomial piece and its Bézier control polygon, *Computer Aided Geometric Design* 16(7) : 613-631 (1999)
- [P] J. Peters, Evaluation and approximate evaluation of the multivariate Bernstein-Bézier form on a regularly partitioned simplex, *ACM Transactions on Mathematical Software*, Volume 20 , Issue 4 : 460 - 480 (1994)
- [PH] P. Parrilo, S.Lall, Semidefinite Programming Relaxations and Algebraic Optimization in Control, *European Journal of Control*, Volume 9, Issue 2-3 (2003)
- [PBP] H. Prautzsch , W. Boehm , M. Paluszny, *Bezier and B-Spline Techniques*, Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ (2002)
- [R] U. Reif, Best bounds on the approximation of polynomials and splines by their control structure, *Computer Aided Geometric Design* 17(6) : 579 - 589 (2000)
- [RP] B. Reznick, V. Powers, A new bound for Pólya's Theorem with applications to polynomials positive on polyhedra, *J. Pure Appl. Alg.*, 164 : 221-229 (2001)
- [RP2] B. Reznick, V. Powers, A quantitative Polya's Theorem with corner zeros, in *Proceedings of the 2006 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computations*, J. G. Dumas, editor, New York, NY, ACM Press, 285-290.

RÉSUMÉ

L'étude des polynômes réels en plusieurs variables est un problème classique en géométrie algébrique réelle et en calcul formel. Plusieurs questions sont naturelles : positivité éventuelle, calcul du minimum...

Nous nous proposons, dans cette thèse, d'étudier ces questions dans le cas particulier où l'étude est menée sur un simplexe de \mathbb{R}^k .

L'outil essentiel dans notre travail est la base de Bernstein, plus adaptée à la situation que la traditionnelle base des monômes. Elle jouit notamment de propriétés de positivité et d'encadrement essentielles à notre étude.

Elle permet tout d'abord d'obtenir un algorithme décidant si un polynôme f est positif sur un simplexe V , et le cas échéant, fournissant une écriture de f rendant triviale cette positivité : on parle de certificat de positivité.

En outre, elle est à l'origine d'un algorithme de minimisation polynomiale sur un simplexe. Ces deux algorithmes sont certifiés, et l'étude de leur complexité est menée dans cette thèse. Ils ont également fait l'objet d'implémentation sur ordinateur.

ABSTRACT

When dealing with multivariate real polynomials, two natural questions arise : decide if a given polynomial is positive and compute its minimum.

This thesis is devoted to those problems when the study is led on a simplex of \mathbb{R}^k . The main tool is the Bernstein basis, more suited in this case than the traditional monomial basis. In particular, its positivity and bounding properties are essential.

We first derive an algorithm deciding if a given polynomial f is positive on a simplex V of \mathbb{R}^k , and giving, if need be, an expression of f that makes its positivity trivial : a so-called certificate of positivity.

We also derive an algorithm for minimizing a polynomial f over a simplex V . Both algorithms are certified, and their complexity is studied in this thesis.