



Certificats de positivité et minimisation polynomiale dans la base de Bernstein multivariée

JNCF 2008

Marie-Françoise Roy & Richard Leroy
IRMAR

Vendredi 24 octobre 2008

But de l'exposé



Notations

But de l'exposé



Notations

- $f \in \mathbb{R}[X] = \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ de degré d

But de l'exposé



Notations

- $f \in \mathbb{R}[X] = \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ de degré d
- simplexe non dégénéré $V = \text{Conv}[V_0, \dots, V_k] \subset \mathbb{R}^k$

But de l'exposé



Notations

- $f \in \mathbb{R}[X] = \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ de degré d
- simplexe non dégénéré $V = \text{Conv}[V_0, \dots, V_k] \subset \mathbb{R}^k$
- coordonnées barycentriques λ_i ($i = 0, \dots, k$) :
 - polynômes de degré 1
 - $\sum \lambda_i = 1$
 - $x \in V \Leftrightarrow \forall i, \lambda_i(x) \geq 0$

But de l'exposé



Exemple : le simplexe standard

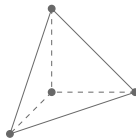
$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \forall i, x_i \geq 0 \text{ et } \sum x_i = 1\}$$



$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ 1 - x &\geq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ 1 - x - y &\geq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ z &\geq 0 \\ 1 - x - y - z &\geq 0 \end{aligned}$$

But de l'exposé



Questions

But de l'exposé



Questions

- Comment décider si f est positif sur V ou non ?

But de l'exposé



Questions

- Comment décider si f est positif sur V ou non ?
- Le cas échéant, comment obtenir une preuve simple de cette positivité ?

But de l'exposé



Questions

- Comment décider si f est positif sur V ou non ?
- Le cas échéant, comment obtenir une preuve simple de cette positivité ?
↪ certificats de positivité

But de l'exposé



Questions

- Comment décider si f est positif sur V ou non ?
- Le cas échéant, comment obtenir une preuve simple de cette positivité ?
 - ↪ certificats de positivité
- Comment calculer le minimum de f sur V (et localiser les minimiseurs) ?

Plan de l'exposé



- 1 Base de Bernstein multivariée
- 2 Certificats de positivité
- 3 Minimisation polynomiale



- 1 Base de Bernstein multivariée
- 2 Certificats de positivité
- 3 Minimisation polynomiale

Polynômes de Bernstein



Notations

- multi-indice $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^{k+1}$
- $|\alpha| = \alpha_0 + \dots + \alpha_k = d$
- coefficient multinomial $\binom{d}{\alpha} = \frac{d!}{\alpha_0! \dots \alpha_k!}$

Polynômes de Bernstein



Notations

- multi-indice $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^{k+1}$
- $|\alpha| = \alpha_0 + \dots + \alpha_k = d$
- coefficient multinomial $\binom{d}{\alpha} = \frac{d!}{\alpha_0! \dots \alpha_k!}$

Polynômes de Bernstein de degré d associés à V

$$B_{\alpha}^d = \binom{d}{\alpha} \lambda^{\alpha} = \binom{d}{\alpha} \lambda_0^{\alpha_0} \dots \lambda_k^{\alpha_k}.$$

Polynômes de Bernstein



Notations

- multi-indice $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^{k+1}$
- $|\alpha| = \alpha_0 + \dots + \alpha_k = d$
- coefficient multinomial $\binom{d}{\alpha} = \frac{d!}{\alpha_0! \dots \alpha_k!}$

Polynômes de Bernstein de degré d associés à V

$$B_{\alpha}^d = \binom{d}{\alpha} \lambda^{\alpha} = \binom{d}{\alpha} \lambda_0^{\alpha_0} \dots \lambda_k^{\alpha_k}.$$

Apparaissent naturellement dans le développement

$$1 = 1^d = (\lambda_0 + \dots + \lambda_k)^d = \sum_{|\alpha|=d} \binom{d}{\alpha} \lambda^{\alpha} = \sum_{|\alpha|=d} B_{\alpha}^d.$$



Propriétés



Propriétés

- positifs sur V



Propriétés

- positifs sur V
- base de $\mathbb{R}_d[X]$



Propriétés

- positifs sur V
- base de $\mathbb{R}_d[X]$

↔ coefficients de Bernstein :

- Tout polynôme f de degré $\leq d$ s'écrit de manière unique

$$f = \sum_{|\alpha|=d} b_\alpha(f, d, V) B_\alpha^d.$$

- $b(f, d, V)$: liste des coefficients $b_\alpha = b_\alpha(f, d, V)$

Grille de contrôle



Grille de contrôle



- Grille de Gréville : points $N_\alpha = \frac{\alpha_0 V_0 + \dots + \alpha_k V_k}{d}$

Grille de contrôle



- Grille de Gréville : points $N_\alpha = \frac{\alpha_0 V_0 + \dots + \alpha_k V_k}{d}$
- Grille de contrôle : points (N_α, b_α)

Grille de contrôle

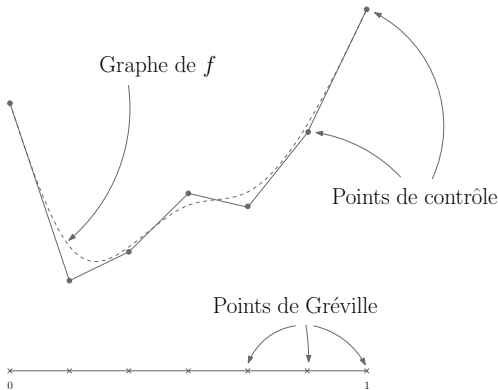


- Grille de Gréville : points $N_\alpha = \frac{\alpha_0 V_0 + \dots + \alpha_k V_k}{d}$
- Grille de contrôle : points (N_α, b_α)
- Graphe de f sur la grille de Gréville : points $(N_\alpha, f(N_\alpha))$

Grille de contrôle



- Grille de Gréville : points $N_\alpha = \frac{\alpha_0 V_0 + \dots + \alpha_k V_k}{d}$
- Grille de contrôle : points (N_α, b_α)
- Graphe de f sur la grille de Gréville : points $(N_\alpha, f(N_\alpha))$



Propriétés d'interpolation



Propriétés d'interpolation



■ Précision affine

$$\text{Si } d \leq 1 : b_\alpha = f(N_\alpha)$$

Propriétés d'interpolation



■ Précision affine

$$\text{Si } d \leq 1 : b_\alpha = f(N_\alpha)$$

■ Interpolation aux sommets

$$b_{de_i} = f(V_i)$$

Propriétés d'interpolation



■ Précision affine

$$\text{Si } d \leq 1 : b_\alpha = f(N_\alpha)$$

■ Interpolation aux sommets

$$b_{de_i} = f(V_i)$$

■ Et les autres coefficients dans le cas $d \geq 2$?

Propriétés d'interpolation



■ Précision affine

$$\text{Si } d \leq 1 : b_\alpha = f(N_\alpha)$$

■ Interpolation aux sommets

$$b_{de_i} = f(V_i)$$

■ Et les autres coefficients dans le cas $d \geq 2$?

\hookrightarrow mesurer l'écart entre $f(N_\alpha)$ et b_α

Ecart grille de contrôle / graphe de f 

Théorème

L'écart entre la grille de contrôle et le graphe de f est majoré par

$$\frac{dk(k+2)}{24} \underbrace{\|\Delta^2 b(f, d, V)\|_\infty}_{\| \quad \|}$$

$$\max_{\substack{|\gamma|=d-2 \\ 0 \leq i < j \leq k}} \underbrace{|b_{\gamma+e_i+e_{j-1}} + b_{\gamma+e_{i-1}+e_j} - b_{\gamma+e_i+e_j} - b_{\gamma+e_{i-1}+e_{j-1}}|}_{\text{différences secondes}}$$

Le cas le pire est atteint par une certaine forme quadratique, qui réalise la borne ci-dessus.



- 1 Base de Bernstein multivariée
- 2 Certificats de positivité
- 3 Minimisation polynomiale

Certificats de positivité



Certificats de positivité



- Hypothèse de positivité : $m = \min_{\Delta} f > 0$

Certificats de positivité



- Hypothèse de positivité : $m = \min_{\Delta} f > 0$
- Certificat de positivité :
Identité algébrique prouvant que f est positif sur Δ .

Certificats de positivité



- Hypothèse de positivité : $m = \min_{\Delta} f > 0$
- Certificat de positivité :
Identité algébrique prouvant que f est positif sur Δ .
- Ici :

Certificat de positivité dans la base de Bernstein

Si $b(f, d, V) > 0$, alors $f > 0$ sur Δ .

Certificats de positivité



- Hypothèse de positivité : $m = \min_{\Delta} f > 0$
- Certificat de positivité :
Identité algébrique prouvant que f est positif sur Δ .
- Ici :

Certificat de positivité dans la base de Bernstein

Si $b(f, d, V) > 0$, alors $f > 0$ sur Δ .

- **Attention** : Réciproque fausse !

Certificats de positivité



- Hypothèse de positivité : $m = \min_{\Delta} f > 0$
- Certificat de positivité :
Identité algébrique prouvant que f est positif sur Δ .
- Ici :

Certificat de positivité dans la base de Bernstein

Si $b(f, d, V) > 0$, alors $f > 0$ sur Δ .

- **Attention** : Réciproque fautive !
 - $f = 6x^2 - 6x + 2 > 0$ sur $[0, 1]$, mais
 $b(f, 2, [0, 1]) = [2, -1, 2]$.



- 2 Certificats de positivité
 - Par élévation du degré
 - Par subdivision

Certificats de positivité

par élévation du degré



Idée : Exprimer f dans les bases de Bernstein de degrés $D \geq d$ de plus en plus grands.

Si D est assez grand, alors tous les coefficients $b_\alpha(f, D, \Delta)$ sont > 0 .

Théorème

$$D > \frac{d(d-1)k(k+2)}{24m} \|\Delta^2 b(f, d, \Delta)\|_\infty \Rightarrow b(f, D, \Delta) > 0.$$



- 2 Certificats de positivité
 - Par élévation du degré
 - Par subdivision

Certificats de positivité

par subdivision



Idée : Garder le degré d constant, et subdiviser le simplexe Δ .
Si la subdivision est suffisamment fine, alors sur chaque sous-simplexe V^i , les coefficients $b_\alpha(f, d, V^i)$ sont > 0 .

Outil : triangulations standard de degré 2 successives :

$$\Delta = V^1 \cup \dots \cup V^{2^{kN}}.$$

Théorème

Si $2^N > \frac{\sqrt{d}k(k+2)\sqrt{k(k+1)(k+3)}}{24\sqrt{m}} \|\Delta^2 b(f, d, \Delta)\|_\infty$,

alors $b(f, D, V^i) > 0$ sur chaque V^i .

Certificats de positivité par subdivision



Avantages :

Certificats de positivité

par subdivision



Avantages :

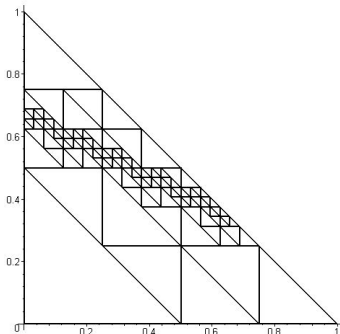
- le processus s'adapte à la géométrie du polynôme f

Certificats de positivité par subdivision



Avantages :

- le processus s'adapte à la géométrie du polynôme f



Certificats de positivité

par subdivision



Avantages :

- le processus s'adapte à la géométrie du polynôme f
- taille des certificats de positivité moindre

Certificats de positivité

par subdivision



Avantages :

- le processus s'adapte à la géométrie du polynôme f
- taille des certificats de positivité moindre
- meilleure interpolation

Certificats de positivité

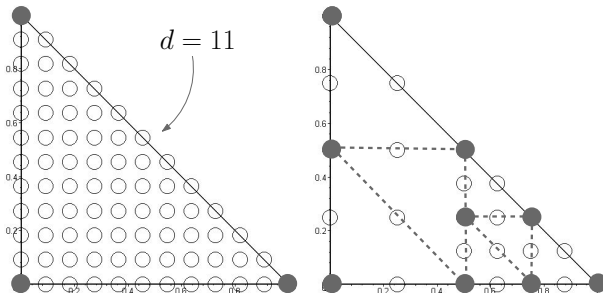
par subdivision



Avantages :

- le processus s'adapte à la géométrie du polynôme f
- taille des certificats de positivité moindre
- meilleure interpolation

$$f = (2 - 4X + 3Y)^2 + 1$$



Certificats de positivité

par subdivision



Le processus s'arrête :

Théorème

Il existe une constante (explicite) $m_{k,d,\tau} > 0$ telle que si $\deg(f) \leq d$ et la taille binaire des coefficients de f est majorée par τ , alors

$$f > m_{k,d,\tau} \text{ sur } \Delta.$$



- 1 Base de Bernstein multivariée
- 2 Certificats de positivité
- 3 Minimisation polynomiale**

Propriété d'encadrement



Soit m le minimum de f sur le simplexe standard Δ .

But : donner un encadrement aussi précis que l'on veut de m .

Propriété d'encadrement

Soit V un simplexe, et m_V le minimum de f sur V . Alors :

$$m_V \in [s_V, t_V],$$

où

$$s_V = \min b_\alpha,$$

$$t_V = \min[f(N_\beta), \underbrace{b_{de_i}}_{=f(V_i)}, i = 0, \dots, k],$$

β est tel que $b_\beta = s_V$.

Algorithme



Principe :

Algorithme



Principe :

- On subdivise : $\Delta = V^1 \cup \dots \cup V^s$.

Algorithme



Principe :

- On subdivise : $\Delta = V^1 \cup \dots \cup V^s$.
- On élimine les simplexes sur lesquels f est trop grand

Algorithme



Principe :

- On subdivise : $\Delta = V^1 \cup \dots \cup V^s$.
- On élimine les simplexes sur lesquels f est trop grand
- On boucle jusqu'à ce que sur chaque simplexe V^i , on ait :

$$t_{V^i} - s_{V^i} < \varepsilon,$$

où ε est la précision recherchée.

Algorithme



Principe :

- On subdivise : $\Delta = V^1 \cup \dots \cup V^s$.
- On élimine les simplexes sur lesquels f est trop grand
- On boucle jusqu'à ce que sur chaque simplexe V^i , on ait :

$$t_{V^i} - s_{V^i} < \varepsilon,$$

où ε est la précision recherchée.

Outil : triangulations standard de degré 2 successives.

Algorithme



Principe :

- On subdivise : $\Delta = V^1 \cup \dots \cup V^s$.
- On élimine les simplexes sur lesquels f est trop grand
- On boucle jusqu'à ce que sur chaque simplexe V^i , on ait :

$$t_{V^i} - s_{V^i} < \varepsilon,$$

où ε est la précision recherchée.

Outil : triangulations standard de degré 2 successives.

$$\text{Si } \frac{dk^3(k+1)^2(k+2)(k+3)}{2^{2N}} \frac{\|\Delta^2 b(f, d, \Delta)\|_\infty}{576} < \varepsilon,$$

alors au plus N étapes de subdivision sont nécessaires.

Conclusion



Conclusion



Algorithmes

Conclusion



Algorithmes

- certifiés

Conclusion



Algorithmes

- certifiés
- complexité connue

Conclusion



Algorithmes

- certifiés
- complexité connue
- implantés

Conclusion



Algorithmes

- certifiés
- complexité connue
- implantés

Travail futur

Conclusion



Algorithmes

- certifiés
- complexité connue
- implantés

Travail futur

- meilleure complexité (comme en une variable)

Conclusion



Algorithmes

- certifiés
- complexité connue
- implantés

Travail futur

- meilleure complexité (comme en une variable)
- Sage ?

Conclusion



Algorithmes

- certifiés
- complexité connue
- implantés

Travail futur

- meilleure complexité (comme en une variable)
- Mathemagix ?