Minimisation polynomiale à plusieurs variables: l'approche de la théorie des moments (d'après Lasserre)

Richard Leroy

11 février 2005

Programmation semi-définie positive

Optimisation sans contraintes

Optimisation avec contraintes

Et après ?

Problème primal

- Données
  - $n, m \geq 1$
  - $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
  - $A_i \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ i = 1, \ldots, m$ et $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Problème primal

- Données
  - $n, m \geq 1$
  - $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
  - $A_i \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ i = 1, \ldots, m$ et $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
- Problème primal

$$\textbf{(P)} \qquad \text{minimiser} \qquad {}^t\mathbf{b}\mathbf{y}$$

$$\text{sous les contrainte} \quad C - \sum_{i=1}^{m} y_i A_i \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

Problème primal

- Données
  - $n, m \geq 1$
  - $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
  - $A_i \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ i = 1, \ldots, m$ et $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
- Problème primal

$$\begin{array}{lll} (\mathbf{P}) & \text{minimiser} & {}^t\mathbf{by} \\ & \text{sous les contrainte} & C - \sum_{i=1}^{m} y_i A_i \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \end{array}$$

- Solutions

  $\mathcal{F}_P$: solutions primales

  $p^* := \inf \left\{ {}^t\mathbf{by} /\ \mathbf{y} \in \mathcal{F}_P \right\}$: valeur primale optimale

  Solution primale optimale $\mathbf{y}^*$: $\mathbf{y}^* \in \mathcal{F}_P$ et ${}^t\mathbf{by}^* = p^*$

Problème dual

- Données
  - $n, m \geq 1$
  - $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
  - $A_i \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ i = 1, \ldots, m$ et $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Problème dual

- Données
  - $n, m \geq 1$
  - $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
  - $A_i \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ i = 1, \ldots, m$ et $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
- Problème dual

$$
\begin{array}{lcl}
\textbf{(D)} & \text{maximiser} & \langle C, X \rangle \\
 & \text{sous les contraintes} & \forall i,\ \langle A_i, X \rangle = \mathbf{b}_i \\
 & & X \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})
\end{array}
$$

Problème dual

- Données
  - $n, m \geq 1$
  - $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
  - $A_i \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ i = 1, \ldots, m$ et $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
- Problème dual

$$\textbf{(D)} \qquad \begin{array}{rl} \text{maximiser} & \langle C, X \rangle \\ \text{sous les contraintes} & \forall i,\ \langle A_i, X \rangle = \mathbf{b}_i \\ & X \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \end{array}$$

- Solutions

  $\mathcal{F}_D$: solutions duales

  $d^* := \sup \{\langle C, X \rangle \ / \ X \in \mathcal{F}_D\}$: valeur duale optimale

  Solution duale optimale X^* : $X^* \in \mathcal{F}_D$ et $\langle C, X^* \rangle = d^*$

Dualités faible et forte

Dualités faible et forte

- Proposition (Dualité faible)
  $d^* \leq p^*$

Dualités faible et forte

- Proposition (Dualité faible)

  $d^* \leq p^*$

- Théorème (Dualité forte)

$$\left.\begin{array}{l} \exists \boldsymbol{y},\ C - \sum_{i=1}^{m} y_i A_i \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \\ \mathcal{F}_D \neq \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow p^* = d^*.$$

  De plus, d^* *est alors atteint.*

Optimisation sans contraintes

Soit $\mathbb{R}_m[x] := \mathbb{R}_m[x_1, \ldots, x_n]$, de base $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{mon}_m(x) = (1, x_1, \ldots, x_n, x_1 x_2, \ldots, x_1 x_n, x_2 x_3, \ldots, x_n^2, \ldots, x_1^m, \ldots, x_n^m)$$

$$\mathrm{d}(m) := \dim \mathbb{R}_m[x] = \begin{pmatrix} n+m \\ m \end{pmatrix}$$

Optimisation sans contraintes

Soit $\mathbb{R}_m[x] := \mathbb{R}_m[x_1, \ldots, x_n]$, de base $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{mon}_m(x) = (1, x_1, \ldots, x_n, x_1x_2, \ldots, x_1x_n, x_2x_3, \ldots, x_n^2, \ldots, x_1^m, \ldots, x_n^m)$$

$$\mathrm{d}(m) := \dim \mathbb{R}_m[x] = \left(\begin{array}{c} n+m \\ m \end{array} \right)$$

Problème de minimisation sans contraintes

$$(\mathbb{P}) \qquad \begin{array}{ll} \min & P(x) \\ \text{contrainte} & x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

- <u>Entrée</u>
  - $P = \sum_\alpha p_\alpha x^\alpha \in \mathbb{R}_{2m}[x]$ admettant un minimum
- <u>Sortie</u>
  - le minimum global p^* de P

Interprétation en termes de moments

Théorème

Le problème $(\mathbb{P})$ est équivalent au problème

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{array}{ll} \inf & \displaystyle\int P(x) d\mu(x) \\ \textit{contrainte} & \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

avec $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$: espace des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^n$.

Interprétation en termes de moments

Théorème

Le problème $(\mathbb{P})$ est équivalent au problème

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf \qquad \int P(x)d\mu(x)$$
$$\textit{contrainte} \quad \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

avec $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$: espace des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^n$.

Reformulation

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf \qquad \sum_{\alpha} p_\alpha y_\alpha$$
$$\text{contrainte} \quad \exists \mu_y \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n),\ y_\alpha = \int x^\alpha d\mu_y(x)$$

Matrice des moments

- Définition

  Soit $y \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}(2m)}$ *tel que* $y_{0,\ldots,0} = 1$.

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{B}(i) = x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \\ \mathcal{B}(j) = x^{\beta} = x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n}\end{array}\right\} \Rightarrow \left(M_m\left(y\right)\right)_{ij} := y_{\alpha+\beta}$$

Matrice des moments

- Définition

  Soit $y \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}(2m)}$ *tel que* $y_{0,\ldots,0} = 1$.

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{B}(i) = x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\\ \mathcal{B}(j) = x^{\beta} = x_1^{\beta_1}\ldots x_n^{\beta_n}\end{array}\right\} \Rightarrow (M_m(y))_{ij} := y_{\alpha+\beta}$$

- Définition

  $y \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}(2m)}$ *: vecteur des moments d'ordre* $\leq 2m$ *de* μ_y.

  $F \in \mathbb{R}_m[x] \leftrightsquigarrow f \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}(m)}$ *(dans la base* $\mathcal{B}$*).*

$$\langle f, M_m(y) f\rangle = \sum_{\gamma} (F^2)_{\gamma} y_{\gamma} = \int F(x)^2 d\mu_y(x)$$

Matrice des moments

- Définition

  Soit $y \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}(2m)}$ *tel que* $y_{0,\ldots,0} = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{B}(i) = x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \\ \mathcal{B}(j) = x^{\beta} = x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n} \end{array}\right\} \Rightarrow (M_m(y))_{ij} := y_{\alpha+\beta}$$

- Définition

  $y \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}(2m)}$ *: vecteur des moments d'ordre* $\leq 2m$ *de* μ_y.
  $F \in \mathbb{R}_m[x] \leftrightsquigarrow f \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}(m)}$ *(dans la base* $\mathcal{B}$*).*

$$\langle f, M_m(y) f \rangle = \sum_{\gamma} (F^2)_{\gamma} y_{\gamma} = \int F(x)^2 d\mu_y(x)$$

- Proposition

  $M_m(y) \succeq 0$

Relaxation SDP

- Problème primal

$$
\begin{array}{lll}
(\mathbb{Q}) & \inf & \displaystyle\sum_{\alpha} p_\alpha y_\alpha \\
& \text{contrainte} & M_m(y) \succeq 0
\end{array}
$$

Relaxation SDP

- Problème primal

$$(\mathbb{Q}) \qquad \inf \quad \sum_{\alpha} p_\alpha y_\alpha$$
$$\text{contrainte} \quad M_m(y) \succeq 0$$

- Reformulation

$$(\mathbb{Q}) \qquad \inf \quad \sum_{\alpha} p_\alpha y_\alpha$$
$$\text{contrainte} \quad \sum_{\alpha \neq 0} y_\alpha B_\alpha \succeq -B_0$$

Relaxation SDP

- Problème primal

$$(\mathbb{Q}) \qquad \inf \quad \sum_{\alpha} p_\alpha y_\alpha$$
$$\text{contrainte} \quad M_m(y) \succeq 0$$

- Reformulation

$$(\mathbb{Q}) \qquad \inf \quad \sum_{\alpha} p_\alpha y_\alpha$$
$$\text{contrainte} \quad \sum_{\alpha \neq 0} y_\alpha B_\alpha \succeq -B_0$$

- Problème dual

$$(\mathbb{Q}^*) \qquad \sup \quad \langle X, -B_0 \rangle$$
$$\text{contraintes} \quad \forall \alpha \neq 0,\ \langle X, B_\alpha \rangle = p_\alpha$$
$$X \succeq 0$$

Cas favorable

$$\begin{cases} P \in \mathbb{R}_{2m}[X] \\ p_0 := P(0) = 0 \\ p^* := \min P \end{cases}$$

Cas favorable

$$\begin{cases} P \in \mathbb{R}_{2m}[X] \\ p_0 := P(0) = 0 \\ p^* := \min P \end{cases}$$

Théorème

1. $P - p^* \in \sum \mathbb{R}[X]^2 \Rightarrow (\mathbb{P}) \equiv (\mathbb{Q})$:

Cas favorable

$$\begin{cases} P \in \mathbb{R}_{2m}[X] \\ p_0 := P(0) = 0 \\ p^* := \min P \end{cases}$$

Théorème

1. $P - p^* \in \sum \mathbb{R}[X]^2 \Rightarrow (\mathbb{P}) \equiv (\mathbb{Q})$:
    - $\min(\mathbb{P}) = \min(\mathbb{Q})$

Cas favorable

$$\begin{cases} P \in \mathbb{R}_{2m}[X] \\ p_0 := P(0) = 0 \\ p^* := \min P \end{cases}$$

Théorème

1. $P - p^* \in \sum \mathbb{R}[X]^2 \Rightarrow (\mathbb{P}) \equiv (\mathbb{Q})$:
   - $\min(\mathbb{P}) = \min(\mathbb{Q})$
   - $x^* \leftrightsquigarrow y^* := \mathrm{mon}_{2m}(x^*)$

Cas favorable

$$\begin{cases} P \in \mathbb{R}_{2m}[X] \\ p_0 := P(0) = 0 \\ p^* := \min P \end{cases}$$

Théorème

1. $P - p^* \in \sum \mathbb{R}[X]^2 \Rightarrow (\mathbb{P}) \equiv (\mathbb{Q})$:
   - $\min(\mathbb{P}) = \min(\mathbb{Q})$
   - $x^* \leftrightsquigarrow y^* := \mathrm{mon}_{2m}(x^*)$
2. Si $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}^*} \neq \emptyset$, alors :

$$\min(\mathbb{P}) = \min(\mathbb{Q}) \Rightarrow P - p^* \in \sum \mathbb{R}[X]^2$$

Cas général : suite de relaxations SDP

Définition (Matrice localisante)

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{B}(i) = x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \\ \mathcal{B}(j) = x^{\beta} = x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n} \\ Q(x) = \sum_{\eta} q_{\eta} x^{\eta} \end{array}\right\} \Rightarrow (M_m(qy))_{ij} := \sum_{\eta} q_{\eta} y_{\alpha+\beta+\eta}$$

Cas général : suite de relaxations SDP

Définition (Matrice localisante)

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{B}(i) = x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n} \\ \mathcal{B}(j) = x^\beta = x_1^{\beta_1}\dots x_n^{\beta_n} \\ Q(x) = \sum_\eta q_\eta x^\eta \end{array}\right\} \Rightarrow (M_m(qy))_{ij} := \sum_\eta q_\eta y_{\alpha+\beta+\eta}$$

Proposition

- $\{y_\gamma\}$ *: moments d'ordre* $\leq 2m$ *de* μ_y
  $F \in \mathbb{R}_m[x] \leftrightsquigarrow f \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}(m)}$

$$\langle f, M_m(qy)f\rangle = Q(x)\sum_\gamma \left(F^2\right)_\gamma y_\gamma = \int Q(x)F(x)^2 d\mu_y(x)$$

Cas général : suite de relaxations SDP

Définition (Matrice localisante)

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{B}(i) = x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \\ \mathcal{B}(j) = x^\beta = x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n} \\ Q(x) = \sum_\eta q_\eta x^\eta \end{array}\right\} \Rightarrow (M_m(qy))_{ij} := \sum_\eta q_\eta y_{\alpha+\beta+\eta}$$

Proposition

- $\{y_\gamma\}$: *moments d'ordre* $\leq 2m$ *de* μ_y
  $F \in \mathbb{R}_m[x] \leftrightsquigarrow f \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}(m)}$

  $$\langle f, M_m(qy) f\rangle = Q(x) \sum_\gamma \left(F^2\right)_\gamma y_\gamma = \int Q(x) F(x)^2 d\mu_y(x)$$

- $Supp(\mu_y) \subset K_Q := \{Q \geq 0\} \Rightarrow M_m(qy) \succeq 0$

Cas général : suite de relaxations SDP

Hypothèse : on connaît $a > 0$ tel que

$$\exists x^*,\ P(x^*) = \min P \text{ et } \|x^*\| \leq a$$

Cas général : suite de relaxations SDP

Hypothèse : on connaît $a > 0$ tel que

$$\exists x^*,\ P(x^*) = \min P \text{ et } \|x^*\| \leq a$$

Notations :

$$\theta(x) := a^2 - \|x\|^2$$

$$\ell \geq m$$

Cas général : suite de relaxations SDP (2)

Cas général : suite de relaxations SDP (2)

- Problème primal

$$(\mathbb{Q}_a^\ell) \qquad \begin{array}{ll} \inf & \displaystyle\sum_\alpha p_\alpha y_\alpha \\ \text{contraintes} & M_\ell(y) \succeq 0 \\ & M_{\ell-1}(\theta y) \succeq 0 \end{array}$$

Cas général : suite de relaxations SDP (2)

- Problème primal

$$(\mathbb{Q}_a^\ell) \qquad \inf \qquad \sum_\alpha p_\alpha y_\alpha$$
$$\text{contraintes} \quad M_\ell(y) \succeq 0$$
$$M_{\ell-1}(\theta y) \succeq 0$$

- Problème dual

$$\left(\mathbb{Q}_a^\ell\right)^* \qquad \sup \qquad -X(1,1) - a^2 Z(1,1)$$
$$\text{contraintes} \quad \forall \alpha \neq 0,\ \langle X, B_\alpha \rangle + \langle Z, C_\alpha \rangle = p_\alpha$$
$$X, Z \succeq 0$$

$$\left(\begin{array}{c} M_\ell(y) = \sum_\alpha y_\alpha B_\alpha \\ M_{\ell-1}(\theta y) = \sum_\alpha y_\alpha C_\alpha \end{array} \right)$$

Cas général : suite de relaxations SDP (3)

Théorème

Cas général : suite de relaxations SDP (3)

Théorème

1. $\inf(\mathbb{Q}_a^\ell) \underset{\ell\to\infty}{\uparrow} p^*$

Cas général : suite de relaxations SDP (3)

Théorème

1. $\inf(\mathbb{Q}_a^\ell) \underset{\ell \to \infty}{\uparrow} p^*$
2. $\exists \ell_0,\ \forall \ell \geq \ell_0,\ \inf(\mathbb{Q}_a^\ell) = \sup\left(\mathbb{Q}_a^\ell\right)^* = \max\left(\mathbb{Q}_a^\ell\right)^*$

Cas général : suite de relaxations SDP (3)

Théorème

1. $\inf(\mathbb{Q}_a^\ell) \underset{\ell\to\infty}{\uparrow} p^*$
2. $\exists \ell_0,\ \forall \ell \geq \ell_0,\ \inf(\mathbb{Q}_a^\ell) = \sup\left(\mathbb{Q}_a^\ell\right)^* = \max\left(\mathbb{Q}_a^\ell\right)^*$
3. $$\exists Q_i, T_j \in \mathbb{R}[X],\ P - p^* = \sum_i Q_i^2 + \theta \sum_j T_j^2$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \ell \geq \max\left(\deg(Q_i), \deg(T_j)\right),\ p^* = \max\left(\mathbb{Q}_a^\ell\right)^* = \min(\mathbb{Q}_a^\ell)$$

Cas général : suite de relaxations SDP (3)

Théorème

1. $\inf(\mathbb{Q}_a^\ell) \underset{\ell\to\infty}{\uparrow} p^*$
2. $\exists \ell_0,\ \forall \ell \geq \ell_0,\ \inf(\mathbb{Q}_a^\ell) = \sup\left(\mathbb{Q}_a^\ell\right)^* = \max\left(\mathbb{Q}_a^\ell\right)^*$
3. $$\exists Q_i, T_j \in \mathbb{R}[X],\ P - p^* = \sum_i Q_i^2 + \theta \sum_j T_j^2$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \ell \geq \max\left(\deg(Q_i), \deg(T_j)\right),\ p^* = \max\left(\mathbb{Q}_a^\ell\right)^* = \min(\mathbb{Q}_a^\ell)$$
4. *Si $p^* = \max\left(\mathbb{Q}_a^\ell\right)^* = \min(\mathbb{Q}_a^\ell)$, alors on peut construire une écriture de $P - p^*$ comme ci-dessus à partir d'une solution duale optimale (X^*, Z^*).*

Preuve

Ingrédients :

Preuve

Ingrédients :

- dualité forte

Preuve

Ingrédients :

- dualité forte
- Théorème (cf Berg)
  Si $Q > 0$ sur $K_a := \{\|x\| \leq a\}$,
  Alors $\exists \ell_0 \in \mathbb{N}, \exists Q_i, T_j \in \mathbb{R}[X]$,
  $\max(\deg(Q_i)) = \ell_0, \deg(T_j) \leq \ell_0 - 1$,

$$Q = \sum_{i=1}^{r_1} Q_i^2 + \theta \sum_{j=1}^{r_2} T_j^2.$$

Optimisation avec contraintes

Problème de minimisation avec contraintes

$$
\begin{array}{lll}
(\mathbb{P}) & \min & P(x) \\
 & \text{contrainte} & x \in K
\end{array}
$$

Optimisation avec contraintes

Problème de minimisation avec contraintes

$$(\mathbb{P}) \qquad \min \quad P(x)$$
$$\text{contrainte} \quad x \in K$$

- Entrée :
  - $P \in \mathbb{R}_m[x]$
  - $K := \{g_1 \geq 0, \ldots, g_r \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n$ compact, $g_i \in \mathbb{R}_{d_i}[X]$

Optimisation avec contraintes

Problème de minimisation avec contraintes

$$
\begin{array}{lll}
(\mathbb{P}) & \min & P(x) \\
& \text{contrainte} & x \in K
\end{array}
$$

- Entrée :
  - $P \in \mathbb{R}_m[x]$
  - $K := \{g_1 \geq 0, \ldots, g_r \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n$ compact, $g_i \in \mathbb{R}_{d_i}[X]$
  - Hypothèse supplémentaire :

$$\exists u = u_0 + \sum_{k=1}^{r} g_k u_k \quad \left(u_k \in \sum \mathbb{R}[X]^2\right),$$

$$\{u \geq 0\} \text{ est compact}$$

Optimisation avec contraintes

Problème de minimisation avec contraintes

$$\begin{array}{lll} (\mathbb{P}) & \min & P(x) \\ & \text{contrainte} & x \in K \end{array}$$

- Entrée :
  - $P \in \mathbb{R}_m[x]$
  - $K := \{g_1 \geq 0, \ldots, g_r \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n$ compact, $g_i \in \mathbb{R}_{d_i}[X]$
  - Hypothèse supplémentaire :

$$\exists u = u_0 + \sum_{k=1}^{r} g_k u_k \quad \left(u_k \in \sum \mathbb{R}[X]^2\right),$$

$$\{u \geq 0\} \text{ est compact}$$

- Sortie :
  - le minimum p_K^* de P sur K

...sa reformulation...

Reformulation

$$(\mathbb{P}) \qquad \min \qquad \int P(x)d\mu(x)$$
$$\text{contrainte} \quad \mu \in \mathcal{P}(K)$$

($\mathcal{P}(K)$: espace des mesures de probabilité à support $\subset K$)

...et sa relaxation

- Notations
  - $\tilde{d}_i := \left\lceil \frac{d_i}{2} \right\rceil$
  - $\ell \geq \max\left(\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil, \max\left(\tilde{d}_i\right)\right)$
  - $M_{\ell-\tilde{d}_i}(g_i y) = \sum_\alpha C_{i\alpha} y_\alpha$

...et sa relaxation

- Notations
  - $\tilde{d}_i := \left\lceil \frac{d_i}{2} \right\rceil$
  - $\ell \geq \max\left(\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil, \max\left(\tilde{d}_i\right)\right)$
  - $M_{\ell-\tilde{d}_i}(g_i y) = \sum_{\alpha} C_{i\alpha} y_\alpha$
- Problème primal

$$
\begin{array}{lll}
(\mathbb{Q}_K^\ell) & \inf & \displaystyle\sum_\alpha p_\alpha y_\alpha \\
& \text{contraintes} & M_\ell(y) \succeq 0 \\
& & \forall i, M_{\ell-\tilde{d}_i}(g_i y) \succeq 0
\end{array}
$$

...et sa relaxation

- Notations
  - $\tilde{d}_i := \left\lceil \frac{d_i}{2} \right\rceil$
  - $\ell \geq \max\left(\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil, \max\left(\tilde{d}_i\right)\right)$
  - $M_{\ell-\tilde{d}_i}(g_i y) = \sum_\alpha C_{i\alpha} y_\alpha$
- Problème primal

$$(\mathbb{Q}_K^\ell) \qquad \inf \qquad \sum_\alpha p_\alpha y_\alpha$$
$$\text{contraintes} \quad M_\ell(y) \succeq 0$$
$$\forall i, M_{\ell-\tilde{d}_i}(g_i y) \succeq 0$$

- Problème dual

$$(\mathbb{Q}_K^\ell)^* \qquad \sup \qquad -X(1,1) - \sum_{i=1}^r g_i(0) Z_i(1,1)$$
$$\text{contraintes} \quad \forall \alpha \neq 0,\ \langle X, B_\alpha \rangle + \sum_{i=1}^r \langle Z_i, C_{i\alpha} \rangle = p_\alpha$$
$$X, Z_i \succeq 0$$

Le théorème

Théorème

1. $\inf(\mathbb{Q}_K^\ell) \underset{\ell\to\infty}{\uparrow} p_K^*$

Le théorème

Théorème

1. $\inf(\mathbb{Q}_K^\ell) \underset{\ell\to\infty}{\uparrow} p_K^*$
2. *Si* $K^\circ \neq \emptyset$, *alors* $\inf(\mathbb{Q}_K^\ell) = \sup\left(\mathbb{Q}_K^\ell\right)^* = \max\left(\mathbb{Q}_K^\ell\right)^*$

Le théorème

Théorème

1. $\inf(\mathbb{Q}_K^\ell) \underset{\ell \to \infty}{\uparrow} p_K^*$
2. *Si* $K^\circ \neq \emptyset$, *alors* $\inf(\mathbb{Q}_K^\ell) = \sup \left(\mathbb{Q}_K^\ell\right)^* = \max \left(\mathbb{Q}_K^\ell\right)^*$
3. $$\exists Q, T_i \in \sum \mathbb{R}[X]^2,\ P - p_K^* = Q + \sum_{i=1}^{r} g_i T_i$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \ell >> 1,\ p_K^* = \max \left(\mathbb{Q}_K^\ell\right)^* = \min(\mathbb{Q}_K^\ell)$$

Le théorème

Théorème

1. $\inf(\mathbb{Q}_K^\ell) \underset{\ell\to\infty}{\uparrow} p_K^*$
2. *Si* $K^\circ \neq \emptyset$, *alors* $\inf(\mathbb{Q}_K^\ell) = \sup\left(\mathbb{Q}_K^\ell\right)^* = \max\left(\mathbb{Q}_K^\ell\right)^*$
3. $$\exists Q, T_i \in \sum \mathbb{R}[X]^2,\ P - p_K^* = Q + \sum_{i=1}^{r} g_i T_i$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \ell >> 1,\ p_K^* = \max\left(\mathbb{Q}_K^\ell\right)^* = \min(\mathbb{Q}_K^\ell)$$
4. *Si* $p_K^* = \max\left(\mathbb{Q}_K^\ell\right)^* = \min(\mathbb{Q}_K^\ell)$, *alors on peut construire une écriture de* $P - p_K^*$ *comme ci-dessus à partir d'une solution duale optimale* $(X^*, Z_1^*, \dots, Z_r^*)$.

Preuve

Ingrédients

Preuve

Ingrédients

- dualité forte

Preuve

Ingrédients

- dualité forte
- Théorème (critère de Putinar)
  Conditions équivalentes :

Preuve

Ingrédients

- dualité forte
- Théorème (critère de Putinar)
  Conditions équivalentes :

  1. $\exists u = u_0 + \sum_{k=1}^{r} g_k u_k,\ \left(u_k \in \sum \mathbb{R}[X]^2\right)$ tel que

$$\{u \geq 0\} \text{ est compact}$$

Preuve

Ingrédients

- dualité forte
- Théorème (critère de Putinar)
  Conditions équivalentes :

  1. $\exists u = u_0 + \sum_{k=1}^{r} g_k u_k$, $\left(u_k \in \sum \mathbb{R}[X]^2\right)$ tel que
  $$\{u \geq 0\} \text{ est compact}$$
  2. $P > 0$ sur $K \Rightarrow \exists Q, T_1, \ldots, T_r \in \sum \mathbb{R}[X]^2$,
  $$P = Q + \sum_{k=1}^{r} g_k T_k$$

Et après ?

Et après ?

- Détecter que l'on a atteint le minimum
  - condition suffisante sur le rang de la matrice des moments

Et après ?

- Détecter que l'on a atteint le minimum
  - condition suffisante sur le rang de la matrice des moments
- Extraire un (des) minimiseur(s)

Et après ?

- Détecter que l'on a atteint le minimum
  - condition suffisante sur le rang de la matrice des moments
- Extraire un (des) minimiseur(s)
- Résultats de densité :

Et après ?

- Détecter que l'on a atteint le minimum
  - condition suffisante sur le rang de la matrice des moments
- Extraire un (des) minimiseur(s)
- Résultats de densité :
  - exemple :

$$f \geq 0 \rightsquigarrow f_\varepsilon := f + \varepsilon \sum_{k=0}^{r_\varepsilon} \sum_{j=1}^{n} \frac{X_j^{2k}}{k!} \in \sum \mathbb{R}[X]^2$$

$$\| f - f_\varepsilon \|_1 \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$