Concours blanc

Corrigé

Exercice 1 (EML 2011)

Partie I : Étude et représentation graphique de f

1. f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme composée et produit de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned}\forall x>0,\ f'(x) &= \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{x-1}+(x+\ln(x))\,e^{x-1}\\ &= \left(1+\frac{1}{x}+x+\ln(x)\right)e^{x-1}.\end{aligned}$$

2. Il s'agit juste d'étudier la fonction g définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g(x)=\ln(x)+\frac{1}{x}$. Le minimum de g sur $\mathbb{R}^{+*}$ vaut 1, d'où le résultat.
3. on a donc pour tout $x\in\,]0,+\infty[$

$$x+\ln x+1+\frac{1}{x}=\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)+1+x=g(x)+1+x>g(x)>0.$$

   Conclusion : $\boxed{\forall x>0,\ x+\ln x+1+\frac{1}{x}>0.}$
4. On a donc $f'(x)>0$ sur $]0,+\infty[$ *Conclusion :* $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[}$
5. En 0^+ : $f(x)=(x+\ln x)\,e^{x-1}\to-\infty$
   En $+\infty$: $f(x)=(x+\ln x)\,e^{x-1}\to+\infty$.
   On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖		$+$		
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

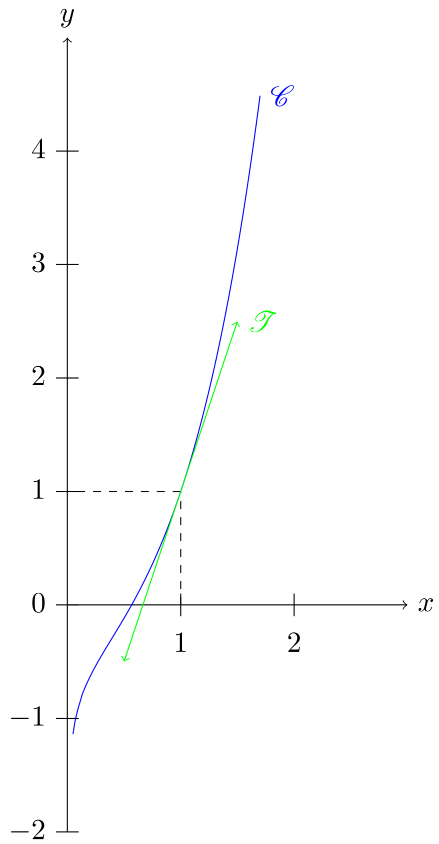
   et $f'(1)=3$ (pente de la tangente en 1).
6. En 0^+ : $f(x)\to-\infty$ et on a donc une asymptote verticale.
   En $+\infty$:

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{(x+\ln x)\,e^{x-1}}{x}=\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)e^{x-1}\to+\infty$$

   car $\ln(x)=o(x)$ et on a donc une branche parabolique verticale en $+\infty$.
7. La tangente $\mathscr{T}$ au point d'abscisse 1 a pour équation :

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)=3(x-1)+1=3x-2.$$

   Au vu des branches infinies, de cette tangente et de l'étude des variations, $\mathscr{C}$ a pour allure :



Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à f.

1. Par récurrence :
   $u_0 = 2$ existe et $u_0 \geq 2$
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n existe et $u_n \geq 2$
   Alors $u_n > 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est donc défini.
   Et comme f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et que u_n et 2 en sont éléments,
   $$f(u_n) \geq u_{n+1} = f(2) = (2 + \ln(2)) \cdot e \geq 2.$$
   Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n \geq 2}$
2. Pour $n = 0$: $u_0 = 2$ et $e^0 = 1$ donc $u_0 \geq e^0$
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq e^n$ alors le moyen naturel est :
   $u_{n+1} = f(u_n) \geq f(e^n)$ mais $f(e^n) = (e^n + \ln(e^n))\, e^{e^n - 1}$ ne donne pas directement le e^{n+1}
   On recycle donc la question précédente :
   $f(u_n) = (u_n + \ln(u_n))\, e^{u_n - 1}$ avec
   - $\ln(u_n) \geq \ln(2)$ donc $u_n + \ln(u_n) \geq u_n \geq e^n$
   - et $u_n - 1 \geq 1$ donc $e^{u_n - 1} \geq e^1$
   - d'où $f(u_n) \geq e^n e = e^{n+1}$

   Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \geq e^n \text{ et par minoration } u_n \to +\infty,}$
3. On calcule u_n et n tant que $u_n < 10^{20}$ (ou jusqu'à ce que $u_n \geq 10^{20}$ puisque ce n'est pas pour u_0 que cela se produit)

```
program premier ;
var n :integer ; u :real ;
begin
     u :=2 ;n :=0 ;
     while u<1E20 do
     begin u :=(u+ln(u))*exp(u-1) ; n :=n+1 ; end ;
     writeln(n) ;
end.
```

Partie III : Étude d'extremums locaux pour une fonction de deux variables associée à f

1. F est l'unique primitive de f qui s'annule en 1 (dont l'existence provient de la continuité de f sur $]0;+\infty[$), donc F est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;+\infty[$.
2. On a, pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$:
$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = F'(x) - 2 \times \frac{1}{2} e^{\frac{x+y}{2}} = f(x) - e^{\frac{x+y}{2}}$$
$$\frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = f(y) - e^{\frac{x+y}{2}}$$
3. (a) f est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ donc bijective de $]0;+\infty[$ dans $]\lim\limits_{0} f; \lim\limits_{+\infty} f[= \mathbb{R}$.

   (b) Pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$, (x,y) est un point critique de G si et seulement si $\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f(x) - e^{\frac{x+y}{2}} = 0 \\ f(y) - e^{\frac{x+y}{2}} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f(x) = f(y) \\ f(y) - e^{\frac{x+y}{2}} = 0 \end{cases}$ et comme f est bijective sur $]0;+\infty[$ *et* que x et y en sont éléments,
$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ f(y) - e^{y} = 0 \end{cases}.$$
   On résout alors cette seconde équation
$$\begin{aligned} f(y) - e^y = 0 &\iff (y + \ln(y))\, e^{y-1} - e^y = 0 \\ &\iff (y + \ln(y))\, e^{-1} - 1 = 0 \\ &\iff y + \ln(y) = e \end{aligned}$$
   Conclusion : $(x,y) \in]0;+\infty[^2$ est un point critique de G si et seulement si $x = y$ et $x + \ln x = e$.
4. On peut appliquer le théorème de bijection sur $]0;+\infty[$ puis vérifier que $1 < \alpha < e$ en comparant les images.

   Conclusion : $x + \ln(x) = e$ a une unique solution α sur $]0;+\infty[$ et $1 < \alpha < e$.
5. G a donc un unique point critique (α, α) sur l'ouvert $]0;+\infty[$
   Reste à tester $rt - s^2 > 0$:
   On a, pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,y) = f'(x) - \frac{1}{2} e^{\frac{x+y}{2}} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x}(x,y) = -\frac{1}{2} e^{\frac{x+y}{2}} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(x,y) = f'(y) - \frac{1}{2} e^{\frac{x+y}{2}} \end{cases}$$
   et en (α, α) :
$$\begin{cases} r = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(\alpha,\alpha) = f'(\alpha) - \frac{1}{2} e^{\alpha} \\ s = -\frac{1}{2} e^{\alpha} \\ t = f'(\alpha) - \frac{1}{2} e^{\alpha} \end{cases}$$
   On simplifie l'expresion de $f'(\alpha)$ en tenant compte du fait que $\alpha + \ln(\alpha) = e$:
$$f'(\alpha) = \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \alpha + \ln(\alpha)\right) e^{\alpha-1} = \left(1 + \frac{1}{\alpha} + e\right) e^{\alpha-1} = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) e^{\alpha-1} + e^{\alpha} > e^{\alpha}$$
   et donc $f'(\alpha) - e^{\alpha} > 0$ (et en particulier $f'(\alpha) > 0$)

   et on a donc $rt - s^2 = \left(f'(\alpha) - \frac{1}{2} e^{\alpha}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2} e^{\alpha}\right)^2 = f'(\alpha)\left(f'(\alpha) - e^{\alpha}\right) > 0$

   Conclusion : G a un extremum local unique en (α, α) sur l'ouvert $]0,+\infty[^2$ et comme $r > 0$, c'est un minimum local.

Exercice 2 (Carrés magiques)

1. Il y a en tout 8 conditions, qui se traduisent par le système linéaire suivant (8 équations, 9 inconnues) :

$$(S) : \begin{cases} \text{lignes} & \begin{cases} a+b+c=0 & L_1 \\ d+e+f=0 & L_2 \\ i+j+k=0 & L_3 \end{cases} \\ \text{colonnes} & \begin{cases} a+d+i=0 & C_1 \\ b+e+j=0 & C_2 \\ c+f+k=0 & C_3 \end{cases} \\ \text{diagonales} & \begin{cases} a+e+k=0 & D_1 \\ c+e+i=0 & D_2 \end{cases} \end{cases}$$

2. On a deux points à vérifier :
   - La matrice nulle est bien un carré magique de somme nulle (évident).
   - Soient $A, B \in F$ deux carrés magiques de somme nulle, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ deux réels. On écrit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ i & j & k \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} l & m & n \\ o & p & q \\ r & s & t \end{pmatrix}$. Alors $\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda a + \mu l & \lambda b + \mu m & \lambda c + \mu n \\ \lambda d + \mu o & \lambda e + \mu p & \lambda f + \mu q \\ \lambda i + \mu r & \lambda j + \mu s & \lambda k + \mu t \end{pmatrix}$ vérifie les 8 conditions d'un carré magique de somme nulle. Par exemple :
     - $(\lambda a + \mu l) + (\lambda b + \mu m) + (\lambda c + \mu n) = \lambda(a+b+c) + \mu(l+m+n) = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0.$
       Pour les autres lignes, la preuve est semblable.
     - idem pour les colonnes.
     - idem pour les diagonales.

   Remarque : En identifiant $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^9$ (ce que l'on peut rendre mathématiquement rigoureux, mais pas avec le programme de première année), on peut voir l'ensemble des carrés magiques de somme nulle comme l'ensemble de solutions du système linéaire homogène (S), qui est d'après le cours un sev de $\mathbb{R}^9$.
3. C'est évident. Si A est un carré magique de somme nulle, alors $c = -(a+b)$ (d'après L_1). De même, $f = -(d+e)$ (L_2), $i = -(a+d)$ (C_1), $j = -(b+e)$ (C_2) et $k = -(a+e)$ (D_1).
4. Pour la diagonale, on obtient alors $-2a-b-d+e=0$; pour le dernière ligne, on obtient alors $-2a-b-d-e=0$.
5. On en déduit immédiatement que $e=0$ (faire la différence entre les deux équations ci-dessus), d'où $d=-2a-b$.
6. Un carré magique de somme nulle A peut donc s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & b & -(a+b) \\ d & 0 & -d \\ -(a+d) & -b & -a \end{pmatrix} \quad \text{car } e=0 \\ &= \begin{pmatrix} a & b & -(a+b) \\ -2a-b & 0 & 2a+b \\ a+b & -b & -a \end{pmatrix} \quad \text{car } d=-2a-b \\ &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = aM_1 + bM_2, \end{aligned}$$

   comme annoncé.

   Réciproquement, les deux matrices M_1 et M_2 sont deux carrés magiques de somme nulle, et puisque F est un sev de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, toute combinaison linéaire de ces deux matrices est un carré magique de somme nulle.
7. On vient donc de démontrer que $F = \mathrm{Vect}(M_1, M_2)$. (M_1, M_2) est donc une famille génératrice de F. De plus, elle est libre (facile), c'est donc une base de F, qui est donc de dimension 2.
8. - f est linéaire : $\forall A, B \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda A + \mu B) = \lambda A + \mu B + {}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda A + \mu B + \lambda {}^tA + \mu {}^tB = \lambda(A + {}^tA) + \mu(B + {}^tB) = \lambda f(A) + \mu f(B).$$

- $\forall A \in F, f(A) \in F$: en effet, si $A \in F$, ${}^tA \in F$ (évident), et donc $f(A) = A + {}^tA \in F$ car F est un sev de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. f est bien un endomorphisme de F.

9. On a, pour $A = aM_1 + bM_2 \in F$:

$$A \in \mathrm{Ker}(f) \Longleftrightarrow af(M_1) + bf(M_2) = 0 \Longleftrightarrow a \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow a = 0.$$

Ainsi, les carrés magiques de $\mathrm{Ker}(f)$ sont les multiples de M_2, *i.e.* $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(M_2)$. (M_2) est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$, et libre (facile), donc en est une base.

10. On sait que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(f(M_1), f(M_2)) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}(M_3).$$

(M_3) est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, et libre (facile), donc en est une base.

Exercice 3 (EDHEC 2011)

1. (a) $(X_i = 1)$ signifie que l'urne i contient encore ses n boules après les n tirages, donc qu'elle n'a jamais été choisie : $(X_i = 1) = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k}}$ donc (événements indépendants) :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(X_i = 1\right) &= \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}\left(\overline{U_{i,k}}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{n-1}{n}\right) \quad \text{(urnes équiprobables)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

(b) $(X_i = 1) \cap (X_j = 1)$ signifie qu'aucune des deux urnes i et j n'ont été choisies.
A chaque tirage, la probabilité en est de $\dfrac{n-2}{n}$ (urnes équiprobables) donc, pour tout $i \neq j$ de $\{1, 2, ..., n\}$

$$\mathrm{P}\left(X_i = 1 \cap X_j = 1\right) = \left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n.$$

(c) $\left(1 - \dfrac{2}{n}\right) - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^2 = -\dfrac{1}{n^2}$ donc $1 - \dfrac{2}{n} \neq \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^2$ et $\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^n \neq \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{2n}$.
Donc $\mathrm{P}\left(X_i = 1\right)\mathrm{P}\left(X_j = 1\right) \neq \mathrm{P}\left(X_i = 1 \cap X_j = 1\right)$

Conclusion : si i et j sont deux entiers naturels distincts, X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

2. (a) X_i est une variable de Bernoulli donc $E\left(X_i\right) = \mathrm{P}\left(X_i = 1\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. Par linéarité de l'espérance, $E\left(Y_n\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} E\left(X_i\right) = n \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

Conclusion : $\boxed{E\left(Y_n\right) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.}$

(b) On a alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} E\left(Y_n\right) &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \exp\left[n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] \end{aligned}$$

et comme $\ln(1+x) \sim x$ quand $x \to 0$ alors $n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim -n\frac{1}{n}$ donc $n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \to -1$ et $\frac{1}{n} E\left(Y_n\right) \to e^{-1}$

ou encore $\dfrac{E(Y_n)}{n/e} \to 1$.

Conclusion : $\boxed{E(Y_n) \sim \dfrac{n}{e}.}$

Y_n compte le nombre d'urne restant intactes. Donc, en moyenne, le tiers ($e \simeq 3$) environ des urnes reste intouchées.

3. (a) N_i est le nombre de fois où l'urne i a été choisie en n épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$.

   Conclusion : $\boxed{N_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{n}\right) \text{ donc } E(N_i) = n\frac{1}{n} = 1}$

   (b) X_i vaut 0 si l'urne i a été choisie au moins une fois et N_i vaut 0 si elle n'a jamais été choisie.

   Conclusion : $\boxed{N_i X_i = 0}$

   (c) Les variables N_i et X_i ne sont pas indépendantes, en effet $E(N_i X_i) = 0 \neq E(N_i) E(X_i)$.

4.
```
Program edhec 2011 ;
Var    x1, n1, n, k, tirage, hasard : integer ;
Begin
Randomize ; // initialisation du générateur
Writeln('donnez un entier naturel n supérieur ou égal à 2') ;
Readln(n) ; // saisit le nombre d'expérience et d'urne
nl :=0 ; x1 := 1 ; // n1 est un compteur
For k :=1 to n do // on fait n fois
begin
    hasard : = random(n) + 1 ; // choix d'un numero d'urne
     If hasard = 1    then
     begin
          xl :=0 ; // on a choisi au moins une fois l'urne 1
          nl :=n1+1 ; // on compte une boule manquante de plus
     end ;
end ;
Writeln(xl, nl) ;
End.
```