Concours blanc

Vendredi 17 juin 2011 (durée : 4h)

Exercice 1 (EML 2011)

On considère l'application $f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x+\ln x)\, e^{x-1} \end{array}$.

Partie I : Étude et représentation graphique de f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$. On note f' sa fonction dérivée. Pour tout $x \in]0;+\infty[$, calculer $f'(x)$.
2. Établir que : $$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \ln x + \frac{1}{x} > 0$$
3. En déduire que : $$\forall x \in]0;+\infty[, \quad x + \ln x + 1 + \frac{1}{x} > 0.$$
4. En déduire le sens de variation de f.
5. Dresser le tableau de variation de f, comprenant la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$.
   Calculer $f(1)$ et $f'(1)$.
6. Préciser la nature des branches infinies de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère du plan.
7. Tracer l'allure de $\mathscr{C}$. On précisera la tangente au point d'abscisse 1.

Il n'est demandé ni l'étude de la convexité, ni la recherche d'éventuels points d'inflexion.

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à f.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.
2. Établir, par récurrence : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant e^n$.
   Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?
3. Écrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^{20}$.

Partie III : Étude d'extremums locaux pour une fonction de deux variables associée à f

On considère l'application $F : \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$.

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;+\infty[$ et exprimer $F'(x)$, pour tout $x \in]0;+\infty[$, à l'aide de $f(x)$.

On considère l'application de classe $\mathscr{C}^2$ suivante : $G : \begin{array}{ccc}]0;+\infty[^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & F(x) + F(y) - 2e^{\frac{x+y}{2}} \end{array}$.

2. Exprimer les dérivées partielles premières de G, pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$, à l'aide de $f(x)$, $f(y)$ et $e^{\frac{x+y}{2}}$.
3. (a) Montrer que f est bijective.
   (b) Établir que, pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$, (x,y) est un point critique de G si et seulement si : $$x = y \quad \text{et} \quad x + \ln x = e.$$
4. Montrer que l'équation $x + \ln x = e$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$ admet une solution et une seule, que l'on notera α, et montrer que : $1 < \alpha < e$.
5. Montrer que G admet un extremum local. Préciser sa nature.

Exercice 2 (Carrés magiques)

On appelle *carré magique de somme nulle* toute matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

- la somme des coefficients de chacune des trois lignes est nulle.
- la somme des coefficients de chacune des trois colonnes est nulle.
- la somme des coefficients de chacune des deux diagonales est nulle.

On note F l'ensemble des carrés magiques de somme nulle.

1. En posant $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ i & j & k \end{pmatrix}$, écrire la condition « $A \in F$ » sous la forme d'un système linéaire (S).
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Montrer que tout carré magique de somme nulle A peut s'écrire sous la forme :
$$A = \begin{pmatrix} a & b & -(a+b) \\ d & e & -(d+e) \\ -(a+d) & -(b+e) & -(a+e) \end{pmatrix}$$
4. Quelles équations obtient-on alors concernant la diagonale « Sud-Ouest $\rightarrow$ Nord-Est » et la dernière ligne ?
5. En déduire que $e = 0$ puis que $d = -2a - b$.
6. Montrer que tout carré magique de somme nulle A peut s'écrire sous la forme :
$$A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}.$$
Réciproquement, une telle écriture définit-elle un carré magique de somme nulle ?
7. Trouver une base de F et donner sa dimension.

On considère l'application f définie sur F par : $\quad \forall A \in F,\ f(A) = A + {}^tA.$

Rappel : ${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A : si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ i & j & k \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} a & d & i \\ b & e & j \\ c & f & k \end{pmatrix}$.

8. Montrer que f est un endomorphisme de F.
9. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
10. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 3 (EDHEC 2011)

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n, contenant chacune n boules. On répète n épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.
Pour tout i de $\{1, 2, ..., n\}$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée i contient toujours n boules au bout de ces n épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.

1. (a) Pour tout i et tout k, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, on note $U_{i,k}$ l'événement "l'urne numéro i est choisie à la $k^{\text{ème}}$ épreuve".
   Ecrire l'événement $(X_i = 1)$ à l'aide de certains des événements $U_{i,k}$, puis montrer que :
   $$\forall i \in \{1, 2, ..., n\}, \ P(X_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$
   (b) Justifier également que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, on a :
   $$P\left([X_i = 1] \cap [X_j = 1]\right) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n.$$
   (c) Comparer $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$ et $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$ et en déduire que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, alors les variables X_i et X_j ne sont pas indépendantes.
2. On pose $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
   (a) Déterminer l'espérance de Y_n, notée $E(Y_n)$.
   (b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{E(Y_n)}{n}$ et donner un équivalent de $E(Y_n)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
3. Pour tout i de $\{1, 2, ..., n\}$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée i à la fin de ces n épreuves.
   (a) Donner sans calcul la loi de N_i ainsi que la valeur de $E(N_i)$.
   (b) Que vaut le produit $N_i X_i$?
   (c) Les variables N_i et X_i sont-elles indépendantes ?
4. Compléter le programme informatique suivant pour qu'il simule l'expérience décrite au début de cet exercice et affiche les valeurs prises par X_1 et N_1 pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
Program edhec_2011 ;
Var x1, n1, n, k, tirage, hasard : integer ;
Begin
    Randomize ;
    Writeln('donnez un entier naturel n supérieur ou égal à 2') ;
    Readln(n) ;
    n1 :=0 ; x1 :=1 ;
    For k :=1 to n do
    begin
        hasard := random(n)+1 ;
        if hasard = 1 then begin x1 :=----- ; n1 := ----- ; end ;
    end ;
    Writeln(x1,n1) ;
End.
```