**Chapitre n° 21 :**

COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

# I Loi d'un couple de variables aléatoires

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On notera $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$, l'ensemble des valeurs prises respectivement par $X$ et $Y$ (où $I$ et $J$ sont des ensembles d'entiers).

**Définition :** On appelle couple $(X,Y)$ l'application $(X,Y) : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \longmapsto & \big(X(\omega), Y(\omega)\big) \end{array}$.

L'ensemble $(X,Y)(\Omega)$ des valeurs prises par le couple $(X,Y)$ est alors inclus dans l'ensemble des couples de réels suivants $\{(x_i, y_j) \mid (i,j) \in I \times J\}$ :

$$(X,Y)(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega).$$

**Définition :**
On appelle loi conjointe, ou loi du couple $(X,Y)$, la donnée de toutes les probabilités

$$p_{i,j} = \mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathrm{P}\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) \quad \text{pour tout } (i,j) \in I \times J.$$

On pourra représenter cette loi par un tableau à double entrée (fini ou infini selon les cas).

**Exemple :**
On lance (de manière indépendantes) deux dés équilibrés à 4 faces distinctes et on note $X_1$ (resp. $X_2$) le résultat. Soit $Y = \max(X_1, X_2)$.

Loi du couple $(X_1, Y)$ : soit $(i,j) \in \{1, \ldots, 4\}^2$.

1. si $i > j$, alors comme $Y \geq X$, $(X_1 = i) \cap (Y = j) = \varnothing$ et $p_{i,j} = \mathrm{P}\left((X_1 = i) \cap (Y = j)\right) = 0$.
2. si $i < j$, alors $(X_1 = i) \cap (Y = j) = (X_1 = i) \cap (X_2 = j)$ et par indépendance des deux lancers, $p_{i,j} = \mathrm{P}(X_1 = i)\,\mathrm{P}(X_2 = j) = (1/4)^2 = 1/16$.
3. si $i = j$ ; on a $(X_1 = i) \cap (Y = i) = (X_1 = i) \cap (X_2 \leq i)$ (car sinon le maximum devient $X_2$).
   D'où par indépendance, $\mathrm{P}\left((X_1 = i) \cap (Y = i)\right) = \mathrm{P}(X_1 = i)\,\mathrm{P}(X_2 \leq i)$.
   Puis $\mathrm{P}(X_2 \leq i) = \sum_{k=1}^{i} \mathrm{P}(X_2 = k) = i \times \frac{1}{4}$. On en déduit que $p_{i,j} = \mathrm{P}\left((X_1 = i) \cap (Y = i)\right) = \frac{i}{16}$.

| $X_1 \setminus Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/16 | 1/16 | 1/16 | 1/16 |
| 2 | 0 | 2/16 | 1/16 | 1/16 |
| 3 | 0 | 0 | 3/16 | 1/16 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 4/16 |

**Remarque :** : Si on somme tous les coefficients de ce tableau, on obtient 1.

En fait, on a même l'équivalence suivante :

**Théorème :**

$\{p_{ij} \mid (i,j) \in I \times J\}$ est la loi d'un couple de var discrètes *ssi* $\begin{cases} p_{ij} \geq 0 \text{ pour tout } (i,j) \in I \times J \\ \sum_{(i,j) \in I \times J} p_{ij} = 1. \end{cases}$

**Remarque :** :
Dans ce contexte, $\displaystyle\sum_{(i,j) \in I \times J} p_{ij} = \sum_{i \in I} \left( \sum_{j \in J} p_{ij} \right) = \sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I} p_{ij} \right)$.
On peut commencer par sommer sur les indices $j$ puis les indices $i$ ou inversement.
Ce résultat, déjà vu pour les sommes finies, est à admettre pour les sommes doubles infinies à termes positifs.

# II Lois marginales

**Définition :** Les variables $X$ et $Y$ sont appelées variables marginales du couple $(X,Y)$ et leur loi, loi marginale de $X$ (resp. de $Y$).

**Méthode pour trouver les lois marginales à partir de la loi du couple.**

Supposons connue la loi du couple $(X,Y)$, *i.e.* l'ensemble $\{p_{ij} \mid (i,j) \in I \times J\}$.
On cherche maintenant à connaître la loi de $X$ *i.e.* l'ensemble $\{(\mathrm{P}(X = x_i) \mid i \in I\}$.

Or la famille des événements $\{(Y = y_j),\ j \in J\}$ forme un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales appliquée à ce système complet d'événements, on obtient :

$$p_{i,\bullet} := \mathrm{P}(X = x_i) = \sum_{j \in J} \mathrm{P}\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) = \sum_{j \in J} p_{ij}.$$

De même, la loi de $Y$ s'obtient à l'aide de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{(X = x_i),\ i \in I\}$ :

$$p_{\bullet,j} := \mathrm{P}(Y = y_j) = \sum_{i \in I} \mathrm{P}\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) = \sum_{i \in I} p_{ij}.$$

**Exemple :**
Cherchons la loi marginale de $X_1$ :

En effet, par exemple :

| $X_1 \setminus Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $p_{i,\bullet}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/16 | 1/16 | 1/16 | 1/16 | 4/16 |
| 2 | 0 | 2/16 | 1/16 | 1/16 | 4/16 |
| 3 | 0 | 0 | 3/16 | 1/16 | 4/16 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 4/16 | 4/16 |

$$\mathrm{P}(X_1 = 2) = \sum_{j=1}^{4} \mathrm{P}\left((X_1 = 2) \cap (Y = j)\right) = \sum_{j=1}^{4} p_{2,j} = 0 + 2/16 + 1/16 + 1/16 = 4/16 = 1/4.$$

On a en fait calculé la somme des coefficients sur la $2^{\text{ième}}$ ligne. De même pour les autres valeurs prises par $X$.
On retrouve la loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4\}$. Évidemment, pour connaître la loi de $X_1$, il était inutile de calculer la loi du couple $(X_1, Y)$ !

Cherchons maintenant la loi marginale de $Y$ :

| $X_1 \setminus Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $p_{i,\bullet}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/16 | 1/16 | 1/16 | 1/16 | 4/16 |
| 2 | 0 | 2/16 | 1/16 | 1/16 | 4/16 |
| 3 | 0 | 0 | 3/16 | 1/16 | 4/16 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 4/16 | 4/16 |
| $p_{\bullet,j}$ | 1/16 | 3/16 | 5/16 | 7/16 | **1** |

On vérifie, avant toute chose, que la somme des coefficients de la dernière ligne (resp. colonne) fait bien 1 !

Par exemple, $\mathrm{P}(Y = 4) = \sum_{i=1}^{4} \mathrm{P}\left((X_1 = i) \cap (Y = 4)\right) = \sum_{i=1}^{4} p_{i,4} = 7/16$.
On a effectué la somme des coefficients de la $4^{\text{ième}}$ colonne. De même pour les autres valeurs prises par $Y$.

# III Opérations sur les variables aléatoires

## A Somme

**Exemple :** On reprend l'exemple précédent.
On a déterminé la loi conjointe de $(X_1, Y)$. On cherche maintenant à connaître la loi de $X_1 + Y$.

Méthode : on note, dans chaque case du tableau à double entrée de la loi du couple, la valeur de la somme puis pour chaque valeur on somme les probabilités des cases concernées.

| $X_1 \setminus Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\boxed{2}$ 1/16 | $\boxed{3}$ 1/16 | $\boxed{4}$ 1/16 | $\boxed{5}$ 1/16 |
| 2 | $\boxed{3}$ 0 | $\boxed{4}$ 2/16 | $\boxed{5}$ 1/16 | $\boxed{6}$ 1/16 |
| 3 | $\boxed{4}$ 0 | $\boxed{5}$ 0 | $\boxed{6}$ 3/16 | $\boxed{7}$ 1/16 |
| 4 | $\boxed{5}$ 0 | $\boxed{6}$ 0 | $\boxed{7}$ 0 | $\boxed{8}$ 4/16 |

On a alors $(X_1 + Y)(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, et, par exemple, $\mathrm{P}(X_1 + Y = 5) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + 0 + 0 = 2/16$.

En effet,
$(X_1 + Y = 5) = \big((X_1 = 1) \cap (Y = 4)\big) \cup \big((X_1 = 2) \cap (Y = 3)\big) \cup \big((X_1 = 3) \cap (Y = 2)\big) \cup \big((X_1 = 4) \cap (Y = 1)\big)$.
Les évenements de la réunion sont deux à deux incompatibles d'où le calcul de $\mathrm{P}(X_1 + Y = 5)$.

Tableau de la loi de $X_1 + Y$ :

| $k$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X_1 + Y = k)$ | 1/16 | 1/16 | 3/16 | 2/16 | 4/16 | 1/16 | 4/16 |

**Formule générale :**
Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires. Alors $X + Y$ est une variable aléatoire dont la loi s'obtient à l'aide de la formule suivante :

$$\forall z \in (X+Y)(\Omega), \quad \mathrm{P}(X + Y = z) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega),\, y \in Y(\Omega) \\ x+y=z}} \mathrm{P}\big((X = x) \cap (Y = y)\big).$$

**Calcul de l'espérance de la somme $X + Y$, sous réserve d'existence :**

1. Si on connaît la loi de $X$ et de $Y$, on utilise la linéarité de l'espérance : $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$.
2. Si on connaît la loi de $X + Y$, on peut calculer l'espérance en utilisant la définition.
   Dans l'exemple précédent, $\mathrm{E}(X_1 + Y) = 2 \times \frac{1}{16} + 3 \times \frac{1}{16} + .... + 8 \times \frac{4}{16} = \frac{90}{16} = 5.$

## B Produit

**Exemple :** On reprend l'exemple précédent.
La démarche est analogue à la précédente : on repart du tableau de la loi conjointe de $X_1$ et $Y$.

| $X_1 \setminus Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\boxed{1}$ 1/16 | $\boxed{2}$ 1/16 | $\boxed{3}$ 1/16 | $\boxed{4}$ 1/16 |
| 2 | $\boxed{2}$ 0 | $\boxed{4}$ 2/16 | $\boxed{6}$ 1/16 | $\boxed{8}$ 1/16 |
| 3 | $\boxed{3}$ 0 | $\boxed{6}$ 0 | $\boxed{9}$ 3/16 | $\boxed{12}$ 1/16 |
| 4 | $\boxed{4}$ 0 | $\boxed{8}$ 0 | $\boxed{12}$ 0 | $\boxed{16}$ 4/16 |

On a alors $(X_1 \times Y)(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16\}$.
Par lecture du tableau, on obtient par exemple $\mathrm{P}(X_1 \times Y = 4) = 1/16 + 2/16 + 0 = 3/16$.

Tableau de la loi de $X_1 \times Y$ :

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 9 | 12 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X_1 \times Y = k)$ | 1/16 | 1/16 | 1/16 | 3/16 | 1/16 | 1/16 | 3/16 | 1/16 | 4/16 |

**Formule générale** :
Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires. Alors $X \times Y$ est une variable aléatoire dont la loi s'obtient à l'aide de la formule suivante :

$$\forall z \in (X \times Y)(\Omega), \quad \mathrm{P}(X \times Y = z) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega),\, y \in Y(\Omega) \\ x \times y = z}} \mathrm{P}\big((X = x) \cap (Y = y)\big)$$

**Calcul de l'espérance du produit $X \times Y$, sous réserve d'existence :**

Si on connaît la loi de $X \times Y$, on calcule $\mathrm{E}(X \times Y)$ à l'aide de la définition.

**Attention !** En général, $\mathrm{E}(X \times Y) \neq \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$
Ce résultat n'est vrai que si $X$ et $Y$ sont indépendantes (programme de 2$^{\text{ième}}$ année). Pour rappel :

**Définition :** Deux variables aléatoires discrètes $X$ et $Y$ sont dites indépendantes si :

$$\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), \ \mathrm{P}\big((X = x) \cap (Y = y)\big) = \mathrm{P}(X = x)\,\mathrm{P}(Y = y).$$

## C Minimum / maximum

**Exemple :** Reprenons l'exemple précédent.
Pour obtenir la loi de $Y = \max(X_1, X_2)$, on pourrait procéder de manière analogue aux parties précédentes. Donnons une autre méthode, basée sur les fonctions de répartition.

On a $Y(\Omega) = [\![1, 4]\!]$. Puis pour tout $j \in Y(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y \leq j) &= \mathrm{P}\big((X_1 \leq j) \cap (X_2 \leq j)\big) = \mathrm{P}(X_1 \leq j)\,\mathrm{P}(X_2 \leq j) \quad \text{(lancers indépendants)} \\ &= \frac{j}{4} \times \frac{j}{4} = \frac{j^2}{16}. \end{aligned}$$

On obtient que $\forall j \in [\![1, 4]\!]$, $\mathrm{P}(Y = j) = \mathrm{P}(Y \leq j) - \mathrm{P}(Y \leq j - 1) = \frac{j^2 - (j-1)^2}{16} = \frac{2j - 1}{16}$.

**Exercice :** Déterminer, par une méthode analogue, la loi de $Z = \min(X_1, X_2)$.