Chapitre n° 20 :

Comparaison de fonctions et de suites

Dans la suite, on supposera que les fonctions sont définies sur un intervalle I sauf peut-être en un point $x_0 \in I$, et continues. Ce point x_0 pourra désigner également $+\infty$ ou $-\infty$.

I Équivalence

Définition : Soient f, g deux fonctions définies sur I sauf peut-être en x_0 et continues.
On dit que f est équivalente à g au voisinage de x_0 et on écrit $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ ou $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ si :

$$g(x) \neq 0 \text{ dans un voisinage de } x_0 \text{ (sauf peut-être en } x_0) \text{ et } \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Exemple : $\dfrac{x^2+1}{x^5} \underset{+\infty}{\sim}$ car . Et en $-\infty$?

$\dfrac{x^2+1}{x^5} \underset{0}{\sim}$ car

⚠ **Attention !** Ne **jamais** écrire une équivalence du type $f(x) \underset{x_0}{\sim} 0$, cela n'a pas de sens !

Propriété : Un polynôme en x est équivalent en $\pm\infty$ à son monôme de plus haut degré.
Attention, c'est le contraire en 0 !

Exemple : $7x^{13} - 50000x^{10} + 10^{10} \underset{+\infty}{\sim}$ car

$5x^5 - 10x^2 \underset{0}{\sim}$ car

Règles de calcul :

- Soit ℓ un nombre **non nul**. Alors $f(x) \underset{x_0}{\sim} \ell$ ssi $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell$.
- $f(x) \underset{x_0}{\sim} f(x)$
- Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ alors $g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} f(x)$
- Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} h(x)$ alors $f(x) \underset{x_0}{\sim} h(x)$
- Si $f_1(x) \underset{x_0}{\sim} g_1(x)$ et si $f_2(x) \underset{x_0}{\sim} g_2(x)$ alors $f_1(x)f_2(x) \underset{x_0}{\sim} g_1(x)g_2(x)$
- Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ et si $f(x) \neq 0$ au voisinage de x_0 alors $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{1}{g(x)}$
- Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ et $f(x) > 0$ au voisinage de x_0 alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(f(x))^\alpha \underset{x_0}{\sim} (g(x))^\alpha$
- Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ alors $|f(x)| \underset{x_0}{\sim} |g(x)|$.

⚠ **Attention !** La somme et la composition ne préservent pas l'équivalence :

- $f_1(x) \underset{x_0}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x_0}{\sim} g_2(x) \not\Rightarrow f_1(x) + f_2(x) \underset{x_0}{\sim} g_1(x) + g_2(x)$.

  Contre-exemple : $\begin{cases} x^2 + x & \underset{+\infty}{\sim} x^2 \\ -x^2 + x & \underset{+\infty}{\sim} -x^2 \end{cases}$ mais $(x^2+x) + (-x^2+x) = 2x \underset{+\infty}{\not\sim} 0 = (x^2) + (-x^2)$.
- $f_1(x) \underset{x_0}{\sim} f_2(x) \not\Rightarrow g \circ f_1(x) \underset{x_0}{\sim} g \circ f_2(x)$.

  Contre-exemple : $x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} x^2$ mais $e^{x^2+x} \underset{+\infty}{\not\sim} e^{x^2}$ car $\dfrac{e^{x^2+x}}{e^{x^2}} = e^{x^2+x-x^2} = e^x \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty \neq 1$

Théorème : Deux fonctions équivalentes f et g sont dites de même nature, c'est-à-dire :

- f possède une limite en x_0 ssi g possède une limite en x_0 et dans ce cas elles ont la même limite.
- f n'a pas de limite en x_0 ssi g n'a pas de limite en x_0.

La recherche d'équivalents est donc un moyen pour déterminer une limite !

Exercice : trouver la limite en $-\infty$ de $\dfrac{x^2+1}{x^5}$ (qui est une F.I. du type $\frac{\infty}{\infty}$).

Exemples de référence : (déjà vus dans le chapitre sur les limites)

- $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$
- $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$, $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$. En particulier, avec $\alpha = 1/2$, $\sqrt{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{2}$

Exercice : Trouver la limite en 0 de $\dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$:

Trouver la limite en $+\infty$ de $\dfrac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} e^{1/x}} - 1}{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}$:

II Négligeabilité

Définition : On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 et on écrit $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(g(x))$ ou $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$ si :

$$g(x) \neq 0 \text{ dans un voisinage de } x_0 \text{ (sauf peut-être en } x_0) \text{ et } \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Remarque :
« Trouver un équivalent revient à supprimer les termes qui sont négligeables devant les autres » :

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \underset{x_0}{=} o(g(x)) \Leftrightarrow f(x) \underset{x_0}{=} g(x) + o(g(x)).$$

Exemple fondamental :
Au voisinage de 0 : $x^3 = o(x^2)$ car $x^3/x^2 = x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Plus généralement, si $n > p$ alors $x^n = o(x^p)$.
Au voisinage de $\pm\infty$: $x^2 = o(x^3)$ car $x^2/x^3 = 1/x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Plus généralement, si $n > p$ alors $x^p = o(x^n)$.

Règles de calcul :

- $f(x) \underset{x_0}{=} o(1)$ ssi $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$.
- Soit ℓ un nombre **non nul**. Alors $f(x) \underset{x_0}{=} \ell + o(1)$ ssi $f(x) \underset{x\to x_0}{\to} \ell$
- Si $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$ et $g(x) \underset{x_0}{=} o(h(x))$ alors $f(x) \underset{x_0}{=} o(h(x))$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x)) \Leftrightarrow \lambda f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x)) \Leftrightarrow f(x) \underset{x_0}{=} o(\lambda g(x))$
- Si $f_1(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$ et $f_2(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$, alors $f_1(x) + f_2(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$
- Si $f_1(x) \underset{x_0}{=} o(g_1(x))$ et $f_2(x) \underset{x_0}{=} o(g_2(x))$, alors $f_1(x)f_2(x) \underset{x_0}{=} o(g_1(x)g_2(x))$
- Si $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$ et $f(x) \neq 0$ au voisinage de x_0 (sauf peut-être en x_0), alors $\dfrac{1}{g(x)} \underset{x_0}{=} o\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$
- si $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$ et que $f(x)$ et $g(x)$ sont > 0 au voisinage de x_0, alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, $(f(x))^\alpha \underset{x_0}{=} o((g(x))^\alpha)$

Théorème : Supposons que $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$.

- si $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$ alors $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$
- si $|f(x)| \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} +\infty$ alors $|g(x)| \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} +\infty$ (⚠ ne pas oublier les valeurs absolues).

Exemples de référence : *cf* chapitre sur les limites et notamment le théorème des croissances comparées :

- En l'infini :
  - $x^\alpha \underset{\pm\infty}{=} o(x^\beta)$ ssi $0 < \alpha < \beta$ et $\dfrac{1}{x^\alpha} \underset{\pm\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\beta} :\right)$ ssi $0 < \beta < \alpha$
  - $(\ln x)^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta)$ $\forall \alpha > 0, \forall \beta > 0$.
  - $x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(e^{\beta x})$ $\forall \alpha > 0, \forall \beta > 0$ et $e^{-\beta x} \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{x^\alpha})$ $\forall \alpha > 0, \forall \beta > 0$
- En 0 :
  - $(\ln x)^\alpha \underset{0^+}{=} o(\frac{1}{x^\beta})$ $\forall \alpha > 0, \forall \beta > 0$ (car $\dfrac{(\ln x)^\alpha}{\frac{1}{x^\beta}} = x^\beta (\ln x)^\alpha$!)
  - $\ln(1+x) \underset{0}{=} x + o(x)$
  - $e^x \underset{0}{=} 1 + x + o(x)$ car $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ d'où $e^x - 1 = x + o(x)$ soit encore $e^x = 1 + x + o(x)$.

III Cas particulier des suites

Définition : Soient u et v deux suites. On dit qu'au voisinage de $+\infty$:

- u est négligeable devant v : $u_n = o(v_n)$ si $\left(v_n \neq 0 \text{ à partir d'un certain rang et } \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0 \right)$
- u est équivalente à v : $u_n \sim v_n$ si $\left(v_n \neq 0 \text{ à partir d'un certain rang et } \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1. \right)$

Remarque :

- Comme on ne s'intéresse qu'au comportement en $n \to +\infty$, on ne le précisera pas toujours en-dessous des symboles $\sim$ ou o.
- Toutes les propriétés vues dans les sections précédentes s'appliquent aux suites (qui sont des fonctions de la variable n au lieu de x). Les réécrire ci-après !

Théorème : Deux suites équivalentes u et v sont de même nature, c'est-à-dire :

- u converge ssi v converge et dans ce cas elles ont la même limite.
- u diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) ssi v diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Théorème : Supposons que $u_n = o(v_n)$. Alors :

- si la suite v tend vers 0 alors u tend vers 0
- si $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors $|v_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Propriété :

- si $0 < \alpha < \beta$, $n^\alpha = o(n^\beta)$: par exemple, $n^2 = o(n^3)$
- si $0 < \beta < \alpha$, $\frac{1}{n^\alpha} = o(\frac{1}{n^\beta})$: par exemple, $\frac{1}{n^2} = o(\frac{1}{n})$
- Un polynôme en n est équivalent à son monôme de plus haut degré : $7n^{13} - 50000n^{10} + 10^{10} \sim 7n^{13}$
- etc ...