Chapitre n° 15 :
Intégration sur un segment

IV Sommes de Riemann

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ (avec $a<b$). Alors f admet une primitive sur $[a,b]$, mais on ne peut pas forcément calculer la valeur de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$. On présente dans cette partie une méthode pour calculer, à l'aide d'un ordinateur par exemple, des approximations de cette intégrale. On va pour cela construire une suite qui converge vers $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

L'idée est d'utiliser l'interprétation graphique de l'intégrale, et d'approcher l'aire située entre le courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisse et les deux droites verticales d'équation $x=a$ et $x=b$, par une aire que l'on sait calculer : il s'agit de la méthode des rectangles.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose $\ell=b-a$ la longueur de l'intervalle $[a,b]$. Considérons les points :

$$a_0=a \qquad a_1=a+\frac{\ell}{n} \qquad a_2=a+2\frac{\ell}{n} \qquad \dots \qquad a_n=a+n\frac{\ell}{n}.$$

Autrement dit :

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\ a_i=a+i\frac{\ell}{n}.$$

Notons que $a_n=b$.

Les points $(a_0,\dots,a_n)$ forme ce que l'on appelle une subdivision régulière de l'intervalle $[a,b]$.

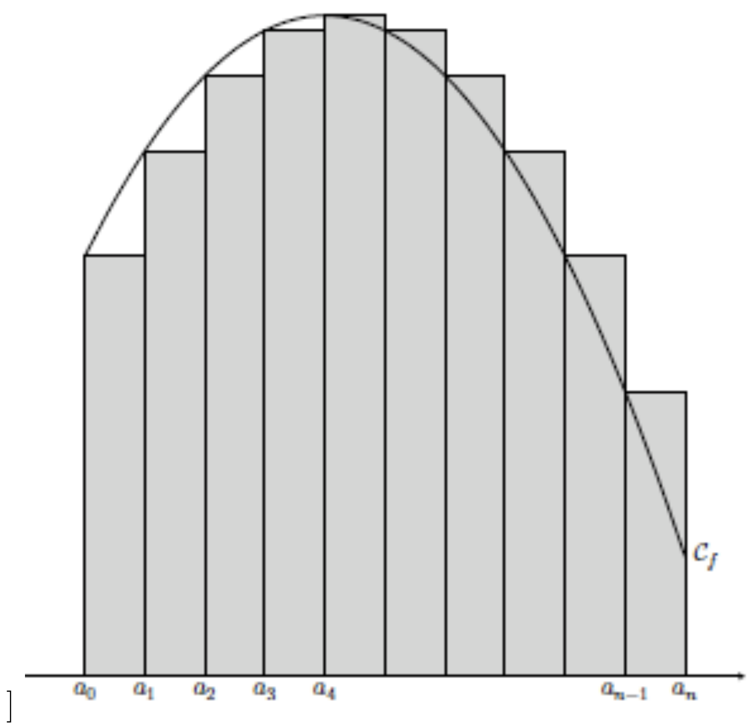


Figure 1 – Somme de Riemann

Considérons la figure précédente, et calculons l'aire de la partie grisée.

Il y a n rectangles. La base de chaque rectangle est égale à .

Par contre, les hauteurs varient, et valent respectivement .

L'aire grisée vaut donc $\displaystyle \frac{\quad}{\quad}\sum_{i=0}^{n-1}$.

Ce nombre s'appelle la $n^{ième}$ *somme de Riemann associée à f.*

On a alors le théorème suivant, affirmant la convergence des sommes de Riemann vers $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$:

Théorème : Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Démonstration. Par souci de simplicité, démontrons le théorème dans le cas où f est croissante, avec $a=0$ et $b=1$. Il s'agit de montrer que

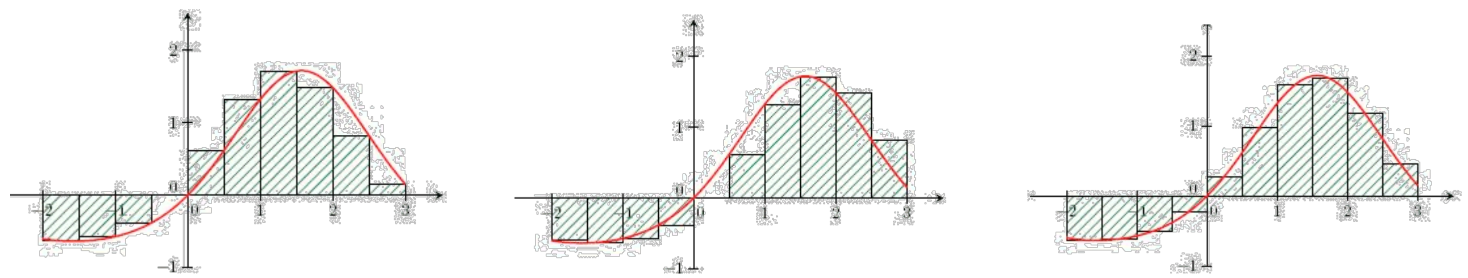
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

□

Remarque : On montrerait de la même façon que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Il s'agirait de la méthode des rectangles à gauche. On pourrait aussi utiliser la méthode des points milieux.



Remarque : On pourrait aussi utliser la méthode des trapèzes...