Fiche n° 21 : Couples de variables aléatoires discrètes

Exercice 1. On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y, suivant des lois de Bernoulli de paramètre respectif p_1 et p_2. Déterminer la loi de $X+Y$ et de XY.

Exercice 2. Soient X et Y deux var indépendantes suivant chacune une loi uniforme sur $\{1,2,3\}$.
On appelle $U = \max(X,Y)$ et $V = \min(X,Y)$.

1. Donner le tableau de la loi conjointe du couple (U,V) et les lois marginales.
2. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 3. La loi de probabilité conjointe du couple de var (X,Y) est donnée par le tableau :

X \ Y	0	1	2	3	
0	2/48	6/48	3/48	1/48	
2	4/48	12/48	6/48	2/48	
4	2/48	6/48	3/48	? ?	

1. Déterminer les lois marginales de X et Y.
2. Déterminer l'espérance de X et Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires dont la loi est définie par le tableau :

$Y\backslash X$	0	1
0	p	$1/2 - p$
1	$1/3 - p$	$p + 1/6$

1. À quel intervalle doit appartenir p pour que ces données soient acceptables ?
2. En déduire alors les lois marginales de X et Y ainsi que leur espérance.
3. Déterminer les lois de $X+Y$ et de XY, et calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Exercice 5. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$, indépendantes. Déterminer la loi de $X+Y$.

Exercice 6. Soit $n \geqslant 2$. On considère une urne contenant : 1 boule numérotée 1 ; 2 boules n° 2 ; $\cdots$; n boules n° n.

1. On tire une boule dans cette urne et on note X la variable aléatoire égale au numéro de cette boule.
   Déterminer la loi de X et son espérance.
2. On effectue maintenant 2 tirages successifs et sans remise dans cette urne. On note X_1 (resp. X_2) le numéro de la première (resp. deuxième) boule tirée.
   (a) Déterminer la loi de X_1.
   (b) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) ; en déduire la lois marginale de X_2.
   (c) Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 7. Soit un dé équilibré comprenant 1 face blanche et 5 faces rouges. On lance ce dé infiniment et on s'intéresse aux longueurs des séries successives de B ou de R : par exemple si les lancers donnent les résultats $BBRRRRRRBBBRR$ la première série (BB) est de longueur 2, la deuxième ($RRRRRR$) de longueur 6, *etc.*
Soit X_1 et X_2 les variables aléatoires égales aux longueurs de la première et deuxième série.

1. Déterminer la loi de X_1. Vérifier que X_1 est bien une variable aléatoire, et qu'elle admet une espérance.
2. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) ; en déduire la loi marginale de X_2.
3. En considérant $P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1))$, montrer que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Exercice 8. Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue n tirages sans remise de cette urne.
On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche et Z le rang de sortie de la deuxième boule blanche.

1. Décrire Ω et donner son cardinal.
2. Déterminer la loi du couple (X,Z). En déduire la loi marginale de X.

Exercice 9. On réalise une succession de pile ou face, pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$ et on note X le rang d'apparition du premier pile, et Y le rang d'apparition du second pile.

1. Loi de X.
2. Loi du couple (X,Y).
3. En déduire la loi marginale de Y.
4. Soit $k \geq 2$. Déterminer la loi de X conditionnelle à $(Y=k)$ (i.e. la loi de X sachant $(Y=k)$).
5. Soit $n \geq 1$. Déterminer la loi de $Y-n$ conditionnelle à $(X=n)$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Exercice 10. Un individu joue avec une pièce truquée pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$.
Dans un premier temps, il lance la pièce jusqu'à obtenir pour la première fois pile : soit N le nombre de lancers nécessaires.
Dans un deuxième temps, si le premier pile est apparu au $n^{\text{ième}}$ lancer, il lance cette même pièce n fois, et compte le nombre X de piles obtenus au cours de cette série de n lancers.

1. Déterminer la loi de X sachant $(N = n)$.
2. Déterminer la loi du couple (N, X).
3. En déduire $P(X = 0)$ puis pour tout $k \geq 1$, $P(X = k)$. On admettra alors le résultat suivant :
$$\forall x \in]-1,1[,\ \forall j \geq 0, \text{ la série } \sum_{i \geq j} \binom{i}{j} x^{i-j} \text{ est convergente et } \sum_{i=j}^{+\infty} \binom{i}{j} x^{i-j} = \frac{1}{(1-x)^{j+1}}.$$
4. Montrer que X a la même loi que $B \times G$ où B et G sont deux variables indépendantes de lois respectives $B \hookrightarrow \mathcal{B}(q)$ et $G \hookrightarrow \mathcal{G}(q)$, q étant à déterminer.

Exercice 11. Andy est un ivrogne : quand il n'a pas bu la veille, il s'enivre le jour même ; et s'il a bu la veille, il y a une chance sur trois pour qu'il reste sobre. On relève son état d'ivresse pendant 400 jours sachant qu'au jour 0, il était ivre.
On note X le nombre de jours où il était sobre, et pour tout $i \in [\![1, 400]\!]$, X_i la variable qui vaut 1 si Andy est sobre le $i^{\text{ième}}$ jour et 0 sinon.

1. Exprimer X en fonction des X_i.
2. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que : $\forall i \in [\![2, 400]\!]$, $p_i = -1/3 \times p_{i-1} + 1/3$ où $p_i = P(X_i = 1)$.
3. En déduire la loi des X_i et leur espérance. Espérance de X ?

Exercice 12. (ESCP 1996)
Une urne contient des boules blanches, noires et rouges.
Les proportions respectives de ces boules sont p pour les blanches, q pour les noires et r pour les rouges $(p + q + r = 1)$.
On fait dans cette urne des tirages successifs indépendants numérotés 1, 2, *etc.* Ces tirages sont faits avec remise. Les proportions des boules restent ainsi les mêmes au cours de l'expérience.
Toutes les variables aléatoires sont définies dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. On note X_1 la variable aléatoire représentant le numéro du tirage auquel une boule blanche sort pour la première fois. Trouver la loi de probabilité de X_1 ; calculer son espérance et sa variance.
2. On note X_2 la variable aléatoire représentant le numéro du deuxième tirage d'une boule blanche.
   (a) Trouver, pour tout couple d'entiers strictement positifs (k, ℓ), la probabilité de l'événement : $\{X_1 = k\ ,\ X_2 = k + \ell\}$. En déduire la loi de probabilité de X_2.
   (b) Montrer que la variable $U_2 = X_2 - X_1$ est indépendante de X_1 et qu'elle a la même loi de probabilité. En déduire l'espérance (et la variance) de X_2.
3. On note W la variable aléatoire représentant le nombre de boules rouges tirées avant l'obtention de la première boule blanche. Pour tout couple (k, ℓ) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle de l'événement $\{W = \ell\}$ sachant que $X_1 = k$. Quelle est la loi conditionnelle de W sachant $X_1 = k$?
4. On note Y_1 la variable aléatoire représentant le numéro du tirage auquel une boule noire sort pour la première fois.
   (a) Trouver 1a loi de probabilité du couple (X_1, Y_1). Les variables aléatoires X_1 et Y_1 sont elles indépendantes ?
   (b) On se place, pour cette question, dans le cas particulier où $r = 0$ (c'est à dire qu'il n'y a pas de boule rouge). Calculer alors la covariance de X_1 et Y_1.
5. Soit, pour n entier strictement positif, Z_n la variable aléatoire qui prend la valeur $+1$ si au $n^{\text{ième}}$ tirage une boule blanche est tirée, -1 si au $n^{\text{ième}}$ tirage une boule noire est tirée, 0 si au $n^{\text{ième}}$ tirage une boule rouge est tirée.
   On note $S_n = Z_1 + \cdots + Z_n$.
   (a) Trouver la loi de probabilité de S_1. Calculer son espérance et sa variance ; en déduire l'espérance (et la variance) de S_n pour tout $n \geq 1$.
   (b) Soit t un réel strictement positif. On pose $V_n = t^{S_n}$. Trouver la loi de probabilité de la variable V_1 et calculer son espérance.
   (c) En déduire l'espérance de V_n.