Fiche n° 20 : Comparaison de fonctions & de suites

Exercice 1. Donner un équivalent des fonctions suivantes au point x_0 considéré et en déduire les limites en ce point :

$a(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$ en $x_0 = 0,\ +\infty$ $\quad$ $b(x) = xe^{2x} - x$ en $x_0 = 0$ $\quad$ $c(x) = \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ en $x_0 = 0$

$d(x) = (x+1)^x - 1$ en $x_0 = 0$ $\quad$ $e(x) = \dfrac{4+\sqrt{x}+x^{10}}{5+x^{11}}$ en $x_0 = 0$ $\quad$ $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ en $x_0 = 1$

$g(x) = x\ln(1+x) - (x+1)\ln(x)$ en $+\infty$ $\quad$ $h(x) = \mathrm{Ent}(x)\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$.

Exercice 2. On considère les 8 fonctions $f_1, \ldots, f_8$ définies par :

$$f_1(x) = e^{-x} \qquad f_2(x) = 1 \qquad f_3(x) = \frac{1}{x} \qquad f_4(x) = e^x \qquad f_5(x) = x^2 \qquad f_6(x) = x \qquad f_7(x) = \ln x \qquad f_8(x) = \frac{1}{x^2}.$$

1. Comparer ces fonctions au sens de la négligeabilité au voisinage de $+\infty$.
2. Comparer ces mêmes fonctions au sens de la négligeabilité au voisinage de 0^+.
3. Pour chaque fonction g_i suivante, déterminer une fonction f_i (la plus simple possible) qui lui est équivalente en $+\infty$:

$$g_1 : x \mapsto x^2 - (\ln x)^3 \qquad g_2 : x \mapsto \sqrt{x} + 2 - x + x^2 \qquad g_3 : x \mapsto \frac{x^2 - \sqrt{x^3-1}}{x+2} \qquad g_4 : x \mapsto \frac{x+3}{3xe^x+1}$$

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

Étudier la branche infinie de f au voisinage de $+\infty$. On admettra que $\ln(1+u) - u \underset{u\to 0}{\sim} \frac{u^2}{2}$.

Exercice 4.

1. Montrer qu'au voisinage de 0, $\quad \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

   (autrement dit $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$). *On pensera à :* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.
2. Montrer qu'au voisinage de 0, $\quad e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 5. Vrai ou Faux ? On justifiera la réponse.

1. Si les suites u et v sont équivalentes, et si u est monotone alors v est monotone.
2. Si la suite u converge vers un réel non nul, on a $u_{n+1} \sim u_n$. Et si elle converge vers un réel nul ?
3. Si la suite u diverge, on a $u_{n+1} \sim u_n$.

Exercice 6.

1. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (n+1)^p - n^p$. Déterminer un équivalent de a_n.
2. Même question avec $b_n = (n+1)^p - (n-1)^p$, $c_n = \sqrt{n^2+1} - n$, $d_n = 2n - \ln(n)$, et $e_n = n^2 e^{-n}$.

Exercice 7.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x + \ln(x) = n$ admet une unique solution x_n sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et diverge vers $+\infty$.
3. Montrer que $x_n \sim n$.