Fiche n° 19 : Applications linéaires

Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1,x_2,x_3) & \mapsto & (2x_1+x_2, x_2-x_3) \end{array}$ $\quad f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1,x_2,x_3) & \mapsto & (x_1^2-x_2, x_2+x_3) \end{array}$ $\quad f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1,x_2,x_3) & \mapsto & (x_2, x_1+x_2) \end{array}$

$f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1,x_2,x_3) & \mapsto & (2x_1x_3, x_1-x_2) \end{array}$ $\quad f_5 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,x_3) & \mapsto & 2x_1+3x_2+x_3+5 \end{array}$

Exercice 2. Soit l'espace vectoriel $E = \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base de E.
Soit g l'application linéaire de E dans E définie par $\left\{\begin{array}{ll} g(\vec{e}_1) & = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \\ g(\vec{e}_2) & = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \end{array}\right.$.

1. Déterminer $g(\vec{x})$ pour tout $\vec{x} \in E$. En déduire que g est bien définie sur E de manière unique.
2. Si $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est la base canonique que vaut $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$?

Exercice 3. Soit f un endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que les images des vecteurs de la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ sont respectivement $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner $f(X)$ pour tout $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les antécédents de $u = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ et de $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. f est-elle injective ? Surjective ?
3. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 4 Soit $D : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$.

1. Montrer que D est une application et qu'elle est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de cette application : est-elle bijective ?
3. Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(D)) + \dim(\mathrm{Im}(D)) = \dim(\mathbb{R}_3[X])$.

Exercice 5. Soit $g\colon \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y-z \\ 2x+y-3z \\ 3x+2y-4z \end{pmatrix}$.

1. Montrer que g est une application linéaire (on pourra chercher sa matrice associée).
2. Déterminer son noyau et son image, et vérifier que $\dim(\mathrm{Ker}(g)) + \dim(\mathrm{Im}(g)) = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.
3. g est-elle un automorphisme ?

Exercice 6. Soit $h\colon \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par $h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y-z \\ y-2z \end{pmatrix}$.

1. Montrer que h est une application linéaire.
2. Déterminer son noyau et son image, et vérifier que $\dim(\mathrm{Ker}(h)) + \dim(\mathrm{Im}(h)) = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.

Exercice 7. Soit $g\colon \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$.

1. Montrer que g est un endomorphisme de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, et soit M sa matrice associée.
2. Déterminer le noyau de g, puis montrer que g est bijective.
3. Déterminer g^{-1} puis la matrice asociée de g^{-1}. Calculer alors M^{-1} : que remarque-t-on ?
4. Déterminer enfin $g \circ g$, sa matrice associée et calculer M^2.

Exercice 8. Soit $f\colon \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $g\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a-b & a-c \\ d & b \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$, puis une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 9 Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $f\colon \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & AM - MA \end{array}$.
Montrer que f est linéaire, puis déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.