Exercice 1. On considère une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir pile est 0.3.

1. On lance 10 fois la pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 piles ?
2. On lance la pièce jusqu'à obtenir pile. Combien en moyenne effectuera-t-on de lancers ?

Exercice 2. 2 orchestres A et B sont respectivement constitués de 4 et 6 musiciens. Chaque musicien a, indépendemment des autres, la probabilité p d'être indisponible un soir donné. Un orchestre peut se produire si strictement plus de la moitié de ses musiciens est présente. Vous organisez une soirée : quel orchestre choisissez-vous ?

Exercice 3. Déterminer l'espérance et la variance de la var $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![5, 10]\!])$.

Exercice 4. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\theta)$. On pose $Y = \frac{1}{X+1}$. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Exercice 5. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, avec $0 < p < 1$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X > k) = (1-p)^k$.
Montrer alors la propriété d'absence de mémoire : $\forall (k, l) \in \mathbb{N}$, $P_{(X>l)}(X > k + l) = P(X > k)$.

Exercice 6. Deux joueurs A et B disposent d'une pièce telle que la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0, 1[$.

1. Chaque joueur lance sa pièce jusqu'à l'obtention d'un pile. On note X_A (resp. X_B) le nombre de lancers nécessaires au joueur A (resp. B)
   a) Donner la loi de X_A et de X_B ainsi que leur espérance et leur variance.
   b) Calculer $P(X_A = X_B)$.
   c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(X_B \geqslant k)$. En déduire $P(X_B \geqslant X_A)$.
2. Chaque joueur lance la pièce n fois. Déterminer la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de piles.

Exercice 7. Dans un magasin de matériel informatique, chaque boîte de CD a la probabilité 49/1000 de contenir au moins un CD défectueux. Régulièrement, un client achète n boîtes de CD. S'il constate qu'un CD est défectueux, il rapporte toute la boîte au magasin. Comment choisir n, pour qu'en moyenne, il ait au plus une boîte à rapporter ?

Exercice 8. Une urne contient dix boules rouges et cinq boules vertes (toutes discernables). On pioche simultanément six boules et on note R (resp. V) le nombre de boules rouges (resp. vertes) obtenues. Déterminer Ω et son cardinal, puis déterminer la loi et l'espérance de R (resp. V).

Exercice 9. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$. On définit la var Y de la façon suivante : si X prend une valeur impaire, alors Y prend la valeur 0, et sinon Y prend la valeur $X/2$. Trouver la loi de Y, et calculer son espérance.
Indication de calcul : trouver les séries associées à $\frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2}$ et $\frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2}$.

Exercice 10. Killy va au téleski et emprunte l'une des N perches de cet appareil. Entre cet instant et la prochaine remontée de Killy le nombre de skieurs (autres que Killy) qui se présentent est une variable de loi $\mathcal{G}(p)$.
Quelle est la probabilité que Killy reprenne la même perche ?

Exercice 11. Un péage comporte 10 guichets numérotés de 1 à 10. Le nombre de voitures N, arrivant au péage en 1 heure, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose de plus que les conducteurs choisissent leur file au hasard et indépendamment des autres. Soit X_1 la variable aléatoire égale au nombre de voitures se présentant au guichet $n1$ en une heure.

1. Déterminer le nombre moyen de voitures arrivant au péage en une heure.
2. Quelle est la probabilité qu'une voiture donnée se présente au guichet $n1$?
3. Calculer $P_{(N=n)}(X_1 = k)$ pour tout $0 \leq k \leq n$. Et pour $k > n$?
4. Justifier que $P(X_1 = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P_{(N=n)}(X_1 = k)P(N = n)$ puis montrer que $P(X_1 = k) = e^{-\lambda} \left(\frac{1}{10}\right)^k \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n \frac{\lambda^n}{n!}$
5. En déduire la loi de X_1, son espérance et sa variance.

Exercice 12. On suppose que le nombre N de colis expédiés à l'étranger un jour donné suit une loi de Poisson de paramètre λ. Ces colis sont expédiés indépendamment les uns des autres et la probabilité pour qu'un colis expédié à l'étranger soit détérioré est égale à t. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de colis détériorés et Y celle comptant les colis en bon état.

1. Calculer pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, la probabilité conditionnelle $P_{(N=n)}(X = k)$.
2. En déduire que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda t)$.
3. En suivant une méthode similaire, déterminer la loi de Y.
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer les probabilités $P((X = k) \cap (Y = j))$ et $P(X = k)P(Y = j)$, pour $(k, j) \in \mathbb{N}^2$. Conclusion ?