Fiche n° 16 : FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

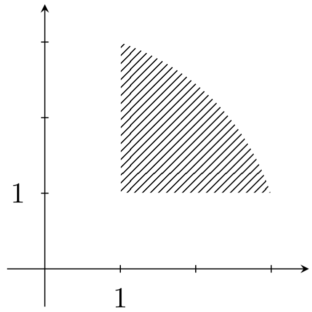
Exercice 1. On définit les trois demi-plans suivants :
$P_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, x + y \geq 0\}$ $\quad P_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, x < 1\}$ $\quad P_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, x - 2y + 2 > 0\}$.
Représenter graphiquement ces trois demi-plans, puis $P_1 \cap P_2$ et $P_1 \cap P_2 \cap P_3$.

Exercice 2. Représenter graphiquement les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 4y = 3\} & \mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 4y < 3\} \\
\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 < 2x + 4y \leqslant 5\} & \mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < -3x + y \leqslant 1\} \\
\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 4\} & \mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 9\} \\
\mathcal{G} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geqslant 1\} & \mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 \leqslant 2, \ x^2 + y^2 \geqslant 3, \ x + y \leqslant 2\} \\
\mathcal{I} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\} & \mathcal{J} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}.
\end{array}$$

Exercice 3. Mettre en (in)équation(s) l'ensemble $\mathcal{K}$ dessiné ci-contre (les frontières sont exclues).

Le bord courbe est un arc de cercle centré en l'origine : on commencera par calculer son rayon.



Exercice 4. Pour chaque fonction, donner son domaine de définition (et le représenter si possible), sa régularité, et calculer ses deux dérivées partielles d'ordre 1 et ses quatre dérivées partielles d'ordre 2 :

$$\begin{array}{rcl}
a(x, y) & = & x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 \\
b(x, y) & = & \ln(x^2 + y^2) \\
c(x, y) & = & (x^2 + y^2)e^{-xy} \\
d(u, v) & = & (u^2 - v)(3u^2 - v) \\
e(s, t) & = & s^2 + t^2 + (3 - s - t)^2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
f(x, y) & = & y^2 - 3x^2y \\
g(x, y) & = & x(\ln y)^2 + y^2 \\
h(x, y) & = & (\ln y)^2 + 2\ln y + x^2 \\
i(x, y) & = & \dfrac{x - y}{x^2 + y}
\end{array}$$

Exercice 5. Dans chacun des cas suivants, déterminer la ligne de niveau d'équation $f(x, y) = k$ (on pensera à préciser l'ensemble de définition de f) :

$$\begin{array}{ll}
f(x, y) = (2x + 3y)^2 - (3x + 2y)^2 \text{ et } k = 0, & f(x, y) = 2e^{4x}e^{3y} + 3 \quad \text{et } k = 5 \\
f(x, y) = \dfrac{(x + y)^2}{x^2 + y^2} \text{ et } k = 1, \ k = 2, & f(x, y) = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y} \quad \text{et } k = 2
\end{array}$$

Exercice 6. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + 2x + y^2 + 3y$.

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer l'unique point critique $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
3. Calculer $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)\right)^2 - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$ et en préciser le signe (cela permet de montrer que le point critique est un minimum local).
4. Écrire f sous forme de somme de carrés en regroupant les x, puis les y et déterminer les courbes de niveau de f.
   En déduire que f admet un minimum global en (-1,-3/2).

Exercice 7. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 4x^2 + y^2 - 4yx + 4x - 2y - 8$.

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer tous les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$, puis les représenter graphiquement.

Exercice 8. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = 2e^{-x} + 3x^2 - 2xy + y^2$.

1. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de g.
3. Démontrer que l'équation $2x - e^{-x} = 0$ a une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Indication : on pourra introduire une fonction auxiliaire.
4. Montrer que g a un unique point critique qui est $M = (\alpha, \alpha)$.
5. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de g.
6. Montrer que g présente en M un minimum local de valeur $2\alpha(2+\alpha)$.

Fiche n° 16 : Corrigé

Exercice 1.