DS n° 5

Correction

Exercice 1 (ECRICOME 2011)

Partie I. Étude des zéros de φ.

1. Les limites sont faciles à calculer, et on trouve : $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{x} = -\infty$. On est donc en présence d'une branche parabolique verticale au voisinage de $+\infty$.
2. φ est continue sur $]0,+\infty[$ comme somme et produit de fonctions continues.
   De plus, par croissances comparées, on a : $\lim\limits_{x\to0} 1 - x^2\ln(x) = 1 = \varphi(0)$, donc φ est également contine en 0.
   Finalement, on a bien démontré la continuité de φ sur $\mathbb{R}^+$.
3. φ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme somme et produit de fonctions dérivables, et l'on a :
   $$\forall x>0,\ \varphi'(x) = -2x\ln(x) - \frac{x^2}{2} = -x(2\ln(x)+1).$$
4. On calcule la taux d'accroissement en 0^+ :
   $$\forall h>0,\ \frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h-0} = -h\ln(h) \xrightarrow[h\to0^+]{} 0,$$
   donc φ est dérivable en 0, avec $\varphi'(0)=0$. La courbe représentative de φ admet une demi-tangente horizontale en $(0,1)$.
5. On a l'équivalence suivante, pour tout $x\in\mathbb{R}^+$:
   $$\varphi'(x)=0 \iff x=0 \text{ ou } -x(2\ln(x)+1)=0 \iff x=0 \text{ ou } 2\ln(x)+1=0 \iff x=0 \text{ ou } x = 1/\sqrt{e}.$$
   On peut maintenant dresser le tableau de variations de φ (avec un peu d'avance sur la question suivante pour α) :

x	0		$1/\sqrt{e}$		α		$+\infty$
$\varphi'(x)$	0	$+$	0		$-$		
φ	1	$\nearrow$	$1+\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

6. Sur l'intervalle $[1/\sqrt{e},+\infty]$, φ est strictement décroissante, continue, donc réalise une bijection de $[1/\sqrt{e},+\infty[$ vers $]-\infty,1+\frac{1}{2e}]$. Puisque $0\in]-\infty,1+\frac{1}{2e}]$, le théorème de la bijection affirme l'existence d'un unique $\alpha\in[1/\sqrt{e},+\infty]$ tel que $\varphi(\alpha)=0$.
   Puisque φ ne s'annule pas sur $[0,1/\sqrt{e}]$ (elle y est strictement positive), on a montré l'existence d'un unique réel positif α tel que $\varphi(\alpha)=0$.
   De plus, $\varphi(\sqrt{2}) = 1-\ln 2 > 0$ et $\varphi(2) = 1-4\ln 2 < 0$, donc, par stricte décroissance de φ sur $[\sqrt{2},2]\subset[1/\sqrt{e},+\infty]$, on obtient bien l'encadrement $\sqrt{2}<\alpha<2$.
7. Il s'agit de programmer la méthode de dichotomie.
   Pour écrire un écrire un programme en Pascal calculant a_7 et b_7, il y a simplement à suivre la définition mathématique donnée pour l'écrire, en plaçant les termes successifs des suites a et b dans `a` et `b` , les réaffectations pour $a_{n+1}=a_n$ et $b_{n+1}=b_n$ étant inutiles.

```
Program dicho;
function phi(x :real) :real;
begin
     if x>0 then phi :=1-x*x*ln(x) else phi :=1;
end;
var a,b : real; n :integer;
begin
     a :=sqrt(2);b :=2;
     for n :=1 to 7 do
          if phi((a+b)/2)phi(a)<0 then b :=(a+b)/2 else a :=(a+b)/2;
writeln( a,b);
end.
```

Partie II. Étude d'une intégrale.

On cherche à calculer $I = \displaystyle\int_0^\alpha \varphi(t)\mathrm{d}t$. Soit F la fonction définie par : $\quad F(x) = \displaystyle\int_x^\alpha \varphi(t)\mathrm{d}t$.

1. φ est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc $\mathscr{D}_F = \mathbb{R}^+$ (intégration d'une fonction continue sur un segment).
2. Pour tout $x \geqslant 0$, on a : $F(x) = -\displaystyle\int_\alpha^x \varphi(t)\mathrm{d}t$, donc F est l'opposée de la primitive de φ qui s'annule en α.
   On a donc : $\forall x \geqslant 0,\ F'(x) = -\varphi(x)$.
3. Il s'agit d'étudier le signe de F', ce qui revient à étudier le signe de $-\varphi$. On a facilement :

x	0		α		$+\infty$
$F'(x) = -\varphi(x)$		$-$	0	$+$	
F		$\searrow$	0	$\nearrow$	

4. Soit $x > 0$. On a alors :
$$F(x) = \int_x^\alpha \varphi(t)\mathrm{d}t = \int_x^\alpha (1 - t^2\ln(t))\mathrm{d}t = \alpha - x - \int_x^\alpha t^2\ln(t)\mathrm{d}t = \alpha - x - \int_x^\alpha u(t)v'(t)\mathrm{d}t,$$
   où u et v sont les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ définies par $u(t) = \ln t$ et $v(t) = t^3/3$.
   En intégrant par parties, on obtient finalement :
$$F(x) = \alpha - x - \frac{\alpha^3\ln\alpha}{3} + \frac{x^3\ln x}{3} + \frac{\alpha^3}{9} - \frac{x^3}{9}.$$
5. F étant continue sur $\mathbb{R}^+$, on a bien : $I = F(0) = \displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x) = \alpha - \frac{\alpha^3\ln\alpha}{3} + \frac{\alpha^3}{9}$ (croissances comparées).
   En se rappelant que $\varphi(\alpha) = 0$, on montre que $\ln\alpha = 1/\alpha^2$, d'où :
$$I = \alpha - \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha^3}{9} = \frac{\alpha(\alpha^2+6)}{9}.$$

Partie III. Extrema de f.

1. On a $\mathscr{D}_f =]0,+\infty[\times]0,+\infty[= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y > 0\}$.
2. Pour $x, y > 0$, on a $f(x,y) = xy + \ln(x)\ln(y)$ donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y + \frac{1}{x}\ln(y) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + \ln(x)\frac{1}{y}.$$

(x,y) est un point critique de f si et seulement si les deux dérivées partielles premières s'annulent :

$$\begin{cases} y + \frac{1}{x}\ln(y) = 0 \\ x + \ln(x)\frac{1}{y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} xy + \ln(y) = 0 \\ xy + \ln(x) = 0 \end{cases} L_1 - L_2 \iff \begin{cases} \ln(y) - \ln(x) = 0 \\ xy + \ln(x) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \ln(y) = \ln(x) \\ xy + \ln(x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \quad (\mathit{ln} \text{ est bijective}) \\ x^2 + \ln(x) = 0 \end{cases}$$

Dans l'équation $x^2 + \ln(x) = 0$, on fait apparaître celle caractérisant α :

$$\begin{aligned} x^2 + \ln(x) = 0 &\iff x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0 \iff \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad (\text{car } x > 0) \\ &\iff {}^1\!/_x = \alpha \\ &\iff x = {}^1\!/_\alpha. \end{aligned}$$

Conclusion : le point de coordonnées $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$ est l'unique point critique de f sur $\mathscr{D}_f$.

3. On a, pour tous réels x et y strictement positifs :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y + \frac{1}{x}\ln(y)\right) = -\frac{1}{x^2}\ln(y).$$

Or

$$\varphi\left(\frac{1}{y}\right) = 1 - \frac{1}{y^2}\ln\left(\frac{1}{y}\right) = 1 + \frac{1}{y^2}\ln(y)$$

donc

$$\ln(y) = y^2\left(\varphi\left(\frac{1}{y}\right) - 1\right)$$

donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{1}{x^2}y^2\left(\varphi\left(\frac{1}{y}\right) - 1\right) = \left(\frac{y}{x}\right)^2\left(1 - \varphi\left(\frac{1}{y}\right)\right).$$

De la même façon

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y + \frac{1}{x}\ln(y)\right) = 1 + \frac{1}{xy}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x + \ln(x)\frac{1}{y}\right) = -\frac{\ln(x)}{y^2} = -\frac{1}{y^2}x^2\left(\varphi\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right) = \left(\frac{x}{y}\right)^2\left(1 - \varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

4. Donc en $(x,y) = \left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$ on a :

$$\begin{aligned} r &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) = \left(\frac{\alpha}{\alpha}\right)^2(1 - \varphi(\alpha)) = 1 \\ s &= 1 + \alpha^2 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

Donc $rt - s^2 = 1 - \left(1 + \alpha^2\right)^2 = -\alpha^2\left(2 + \alpha^2\right) < 0$
Donc, sur $\mathscr{D}_f$, la fonction f ne présente pas d'extremum local, ni global *a fortiori*!

Exercice 2 (ECRICOME 2011)

Partie I. Un jeu en ligne.

1.
```
PROGRAM jeu;
TYPE GRILLE=ARRAY[1..3,1..3] of INTEGER;
VAR A:GRILLE;
i,j,r1,r2,s:INTEGER;
BEGIN
randomize;
FOR i:=1 TO 3 DO
FOR j:=1 TO 3 DO
A[i,j]:=0;                   {on initialise A comme étant la matrice nulle}
s:=0;
WHILE s<>3 DO
BEGIN
r1:=random(3)+1;             {on choisit un entier au hasard parmi 1,2,3}
r2:=random(3)+1;             {on choisit un autre entier au hasard parmi 1,2,3}
A[r1,r2]:=1;
s:=A[1,1]+A[1,2]+A[1,3]+A[2,1]+A[2,2]+A[2,3]+A[3,1]+A[3,2]+A[3,3];
END;
FOR i:=1 TO 3 DO             {affichage de l'écran}
BEGIN
FOR j:=1 TO 3 DO WRITE(A[i, j ]:7);
WRITELN;
END;
END.
```
2. Les positionnements sont déterminés par l'ensemble (sans ordre) des 3 positions distinctes parmi 9. Il y en a donc $\binom{9}{3} = 84$.
3. H est formé de 3 positionnements : ligne 1, 2 ou 3, les positionnements étant équiprobables (on le suppose) donc $\mathrm{P}(H) = \dfrac{3}{84} = \dfrac{1}{28}$.

   V est formé de 3 positionnements : colonne A, B ou C donc $\mathrm{P}(V) = \dfrac{3}{84} = \dfrac{1}{28}$.

   D comporte les deux diagonales descendants et ascendantes. Donc $\mathrm{P}(D) = \dfrac{2}{84} = \dfrac{1}{42}$.
4. (H, V, D, N) étant un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(N) &= 1 - \mathrm{P}(V) - \mathrm{P}(H) - \mathrm{P}(D)\\ &= 1 - \frac{8}{84} = 1 - \frac{2}{21} = \frac{19}{21} \simeq 0.9048.\end{aligned}$$

Partie II. Cas de joueurs invétérés.

1. (a) X est le nombre de parties gagnées en 100 parties indépendantes, la probabilité de gagner chacune valant ${}^2\!/_{21}$. Par conséquent, $X \hookrightarrow \mathscr{B}(100, {}^2\!/_{21})$.

   (b) On a donc $\mathrm{E}(X) = \dfrac{200}{21}$ et $\mathrm{V}(X) = 100 \times \dfrac{2}{21} \times \dfrac{19}{21} = \dfrac{3800}{441}$.

   (c) En p100 parties, X sont gagnées (gain $18X$) et $100 - X$ perdues (perte $2(100 - X)$)
   La perte totale est donc $T = 2(100 - X) - 18X = 200 - 20X$.
2. Avec n parties au lieu de 100, l'événement U : « gagner au moins une partie » est l'événement contraire de $(X = 0)$, avec $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, {}^2\!/_{21})$. Or :

$$\mathrm{P}(X = 0) = \binom{n}{0}\left(\frac{2}{21}\right)^0\left(\frac{19}{21}\right)^n = \left(\frac{19}{21}\right)^n, \text{ donc : } \quad \mathrm{P}(U) = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^n.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(U) \geq 0.5 &\iff \left(\frac{19}{21}\right)^n \leq \frac{1}{2} \\
&\iff n \ln\left(\frac{19}{21}\right) \leq -\ln(2) \ \ (\text{attention } \ln\left(\frac{19}{21}\right) < 0) \\
&\iff n \geq \frac{-\ln(2)}{\ln\left(\dfrac{19}{21}\right)} \simeq \frac{0,69}{0,10} \simeq 6,9
\end{aligned}$$

Il faut donc jouer au moins 7 parties pour en gagner au moins une avec une probabilité supérieure à 50%.

3. (a) Tant que le joueur n'a pas gagné, il joue et gagne la suivante avec une même probabilité ${}^{2}/_{21}$.
Donc Y est le temps d'attente de la première victoire et $Y \hookrightarrow \mathscr{G}({}^{2}/_{21})$.

 (b) On a donc $\mathrm{E}(Y) = \dfrac{21}{2}$ et $\mathrm{V}(Y) = \dfrac{19/21}{(2/21)^2} = \dfrac{399}{4}$.

 (c) On a évidemment :

$$p_k = \mathrm{P}(Y \leqslant k) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}(Y = i) = \sum_{i=1}^{k} ({}^{2}/_{21}) \left({}^{19}/_{21}\right)^{i-1} = ({}^{2}/_{21}) \sum_{i=1}^{k} \left({}^{19}/_{21}\right)^{i-1} = ({}^{2}/_{21}) \sum_{\ell=0}^{k-1} \left({}^{19}/_{21}\right)^{\ell}.$$

On reconnaît la somme des premiers termes d'une suite géométrique, et on a donc :

$$p_k = ({}^{2}/_{21}) \frac{1 - \left({}^{19}/_{21}\right)^k}{1 - ({}^{19}/_{21})} = 1 - \left({}^{19}/_{21}\right)^k.$$

Partie III. Contrôle de la qualité du jeu.

1. Sachant Δ, les positions sont déterminées par la seule combinaison des 2 autres positions parmi les 8 restantes.
Il y a donc $\binom{8}{2} = 28$ positionnements possibles et équiprobables.
H est à présent réduit à la ligne 1, V à la colonne A et D à la diagonale descendante.
Finalement, $\mathrm{P}_\Delta(H) = \mathrm{P}_\Delta(V) = \mathrm{P}_\Delta(D) = \dfrac{1}{28}$.

2. On a donc $\mathrm{P}_\Delta(N) = 1 - \dfrac{3}{28} = \dfrac{25}{28}$.
Sachant $\bar{\Delta}$, l'expérience se fait dans les conditions de la partie I. On avait alors : $\mathrm{P}_{\bar{\Delta}}(N) = \dfrac{19}{21}$
$(\Delta, \bar{\Delta})$ est un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(N) &= \mathrm{P}_{\bar{\Delta}}(N) \times \mathrm{P}\left(\bar{\Delta}\right) + \mathrm{P}_\Delta(N) \times \mathrm{P}(\Delta) \\
&= \frac{19}{21}(1 - x) + \frac{25}{28} x \\
&= -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}.
\end{aligned}$$

3. On a $G(\Omega) = \{2, -18\}$, et $\mathrm{P}(G = 2) = \mathrm{P}(N)$ et $\mathrm{P}(G = -18) = \mathrm{P}(\bar{N}) = 1 - \mathrm{P}(N)$.
La gain moyen vaut donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(G) = -18 \times \mathrm{P}(G = -18) + 2 \times \mathrm{P}(G = 2) &= -18 \times (1 - \mathrm{P}(N)) + 2 \times \mathrm{P}(N) \\
= 20 \times \mathrm{P}(N) - 18 = 20 \times \left(-\frac{x}{84} + \frac{19}{21}\right) - 18 &= -\frac{5x}{21} + \frac{2}{21}.
\end{aligned}$$

On a donc l'équivalence suivante :

$$\mathrm{E}(G) \geqslant 0 \iff x \leqslant \frac{2}{5} :$$

le gain moyen reste positif tant que $x \leqslant \dfrac{2}{5}$.

4. On cherche à calculer la probabilité $\mathrm{P}_{\bar{N}}(\Delta)$. D'après la formule de Bayes, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{\bar{N}}(\Delta) &= \frac{\mathrm{P}(\Delta \cap \bar{N})}{\mathrm{P}(\bar{N})} = \frac{\mathrm{P}(\Delta)\mathrm{P}_{\Delta}(\bar{N})}{\mathrm{P}(\bar{N})} \\ &= \frac{x \cdot \frac{3}{28}}{1 - \left(-\frac{x}{84} + \frac{19}{21}\right)} = \frac{x \cdot \frac{3}{28}}{\frac{2}{21} + \frac{x}{84}} = \frac{9x}{x+8}.\end{aligned}$$

Énigme : les anniversaires (hors barême).

Le professeur de mathématiques d'une classe de ECE composée de 47 élèves propose le jeu suivant :

On suppose que personne ne connaît les dates d'anniversaire des élèves (hormis leur propre anniversaire bien entendu), et qu'aucun élève ne soit né lors d'une année bissextile.
Si au moins deux élèves ont la même date d'anniversaire, chaque élève donne 1€ au professeur. Dans le cas contraire, le professeur verse 15€ à chaque élève de la classe.

À la place de cette classe, accepteriez-vous de participer à ce jeu ? Justifier mathématiquement.

Indications : On pourra utiliser l'approximation suivante, valable pour $x \simeq 0$: $1 - x \simeq e^{-x}$, et la valeur approchée suivante : $\exp(-1081/365) \simeq 0,05$.

Réponse : Le plus simple est de calculer la probabilité $q(n)$ que chaque personne ait une date d'anniversaire différente de celle des autres, en fonction du nombre n d'élèves.
Si $n = 2$, alors $q(2) = \frac{364}{365}$: la seule contrainte est que le deuxième élève ne doit pas être né le même jour que le premier.
Si $n = 3$, alors il y a une contrainte de plus : le troisième élève ne doit pas être né le même jour qu'un de ces deux autres camarades : il lui reste donc 364 possibilités. On a donc $q(3) = \frac{364}{365} \times \frac{363}{365}$.
On répète le même raisonnement jusqu'à un nombre n quelconque d'élèves. On obtient alors :

$$q(n) = \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{365-n+1}{365}.$$

Dans cette énigme, $n = 47$. Il faut donc calculer $q(47)$, sans calculatrice. Comment faire ? En utilisant les indications ! On a donc :

$$\begin{aligned}q(n) &= \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{365-n+1}{365} \\ &= \left(1 - \frac{1}{365}\right) \times \left(1 - \frac{2}{365}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \\ &\simeq \exp\left(\frac{1}{365}\right) \times \exp\left(\frac{2}{365}\right) \times \cdots \times \exp\left(\frac{n-1}{365}\right) \\ &\simeq \exp\left(\frac{1}{365} + \cdots + \frac{n-1}{365}\right) = \exp\left(-\frac{(n-1)n}{2 \times 365}\right).\end{aligned}$$

Dans le cas qui nous concerne, on a donc $q(47) \simeq \exp\left(-\dfrac{46 \times 47}{2 \times 365}\right) \simeq \exp\left(\dfrac{-1081}{365}\right) \simeq 0,05$.

Revenons à l'énigme de départ. Soit G le gain réalisé par le professeur. Alors $G(\Omega) = \{47, -15 \times 47\} = \{47, -705\}$.
Soit p la probabilité que deux élèves (au moins) partagent la même date d'anniversaire.
D'après ce qui précède, $p = 1 - q(47) \simeq 0.95$, et on a donc :

$$\mathrm{E}(G) = 47 \times \mathrm{P}(G = 47) - 705 \times \mathrm{P}(G = -705) = 47p - 705(1-p) = 752p - 705 \simeq 9,40.$$

En moyenne, le professeur gagnera approximativement 9,40€ (en fait, $p \simeq 0,9548$, donc $\mathrm{E}(G) \simeq 13$: le professeur gagne en moyenne 13€ !).

Remarque : On a montré au passage qu'il y a 95% de chances d'avoir au moins un anniversaire en commun !