

Exercice 1 (ECRICOME 2011)

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$$\begin{cases} \varphi(x) = 1 - x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{cases},$$

ainsi que la fonction numérique f des variables réelles x et y définie par : $f(x, y) = xy + \ln(x) \ln(y)$.

Partie I. Étude des zéros de φ .

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$, ainsi que celle de $\frac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement.
2. Prouver que φ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer sa fonction dérivée.
4. Montrer que φ est dérivable en 0, et donner $\varphi'(0)$. Interpréter graphiquement.
5. Dresser le tableau de variations de φ .
6. On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$.
Montrer l'existence d'un unique réel positif α tel que $\varphi(\alpha) = 0$, et justifier que $\sqrt{2} < \alpha < 2$.
7. On considère les deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} a_0 = \sqrt{2} \text{ et } b_0 = 2, \\ \forall n \geq 0, \text{ si } \varphi(a_n) \varphi\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0 \text{ alors } a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \\ \forall n \geq 0, \text{ si } \varphi(a_n) \varphi\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0 \text{ alors } a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = b_n. \end{cases}$$

Écrire une fonction en Turbo Pascal qui calcule, pour un nombre positif (**ou nul**) x , la valeur $\varphi(x)$.

L'inclure dans un programme en Turbo Pascal calculant a_7 et b_7 .

Partie II. Étude d'une intégrale.

On cherche à calculer $I = \int_0^\alpha \varphi(t) dt$. Soit F la fonction définie par : $F(x) = \int_x^\alpha \varphi(t) dt$.

1. Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}_F$ de F ?
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_F$. Quelle est sa dérivée ?
3. Étudier les variations de F sur $\mathcal{D}_F$ (on ne demande pas les limites aux bornes de l'ensemble de définition).
4. Pour $x > 0$, calculer $F(x)$ (le résultat sera exprimé en fonction de x et α).
5. Justifier que $I = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$. En déduire que $I = \frac{\alpha(\alpha^2 + 6)}{9}$.

Partie III. Extrema de f .

1. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f .
2. Calculer les dérivées partielles premières et prouver que le point de coordonnées $(1/\alpha, 1/\alpha)$ est l'unique point critique de f sur $\mathcal{D}_f$.
3. Calculer les dérivées partielles secondes sur $\mathcal{D}_f$ et établir que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}_f$, on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \left(1 - \varphi\left(\frac{1}{y}\right)\right), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 1 + \frac{1}{xy}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \left(\frac{x}{y}\right)^2 \left(1 - \varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right). \end{cases}$$

4. La fonction f présente-t-elle un extremum local sur $\mathcal{D}_f$? Si oui, en donner la nature (min ou max).

Exercice 2 (ECRICOME 2011)

Partie I. Un jeu en ligne.

La société Le hazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes (numérotées 1, 2, 3) et trois colonnes (notées A, B, C).

Après une mise initiale de 2 euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (★) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. Le gagnant empoche 10 fois sa mise, ce qui lui rapporte 18 euros à l'issue du jeu. Dans le cas contraire la mise initiale est perdue par le joueur.

On définit les événements H , V , D , N par :

- H : « les trois jetons sont alignés horizontalement »
- V : « les trois jetons sont alignés verticalement »
- D : « les trois jetons sont alignés en diagonale »
- N : « les trois jetons ne sont pas alignés ».

1. Compléter le programme Turbo Pascal donné en annexe, qui génère aléatoirement des grilles du jeu étudié.

Les grilles sont des matrices 3×3 . Les cases vides sont représentées par des 0 et les cases où figurent un jeton sont représentées par des 1 (voir la matrice ci-dessous, générée par le programme, et représentant la grille de l'exemple).

	A	B	C
1	★		
2	★		
3		★	

Un exemple de grille

--- jeu starts ---

```
1      0      0
1      0      0
0      1      0
```

--- jeu finished ---

Sa représentation en Turbo Pascal

2. Justifier qu'il y a 84 positionnements possibles des trois jetons dans les trois cases.
3. Déterminer les probabilités $P(H)$, $P(V)$, $P(D)$ des événements H , V , D .
4. En déduire que la probabilité de l'événement N vaut : $P(N) = \frac{19}{21} \simeq 0.9048$.

Partie II. Cas de joueurs invétérés.

1. Un joueur décide de jouer 100 parties consécutives que l'on suppose indépendantes.
 - (a) Donner la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de parties gagnées.
 - (b) Indiquer l'espérance et la variance de X .
 - (c) Exprimer la perte T du joueur en fonction de X .
2. Quel nombre minimum n de parties devrait-il jouer pour que la probabilité de gagner au moins une partie soit supérieure ou égale à 50% ? (on admettra que $\ln(19/21) \simeq -0,10$ et $\ln(2) \simeq 0,69$).
3. Un autre joueur décide de jouer et de miser tant qu'une partie n'est pas gagnée. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de parties jouées pour gagner la première fois.
 - (a) Donner la loi de la variable aléatoire Y .
 - (b) Indiquer l'espérance et la variance de Y .
 - (c) Pour tout entier naturel k , montrer que la probabilité p_k que le joueur joue au plus k parties avant de gagner pour la première fois, est donnée par la formule : $p_k = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^k$.

Partie III. Contrôle de la qualité du jeu.

On constate que, parfois, la fonction aléatoire est dérégulée. Dans ce cas, elle place le premier jeton dans la case $(A, 1)$, les deux autres étant placés au hasard dans les cases restantes.

On note Δ l'événement « la fonction aléatoire est dérégulée » et on pose $P(\Delta) = x$ avec $x \in]0, 1[$.

1. Calculer les probabilités conditionnelles $P_{\Delta}(H)$, $P_{\Delta}(V)$, $P_{\Delta}(D)$.
2. Utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement $(\Delta, \overline{\Delta})$ pour en déduire que la probabilité les jetons ne soient pas alignés est égale à : $P(N) = -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}$.
3. Soit G la variable aléatoire égale au gain réalisé par la société de jeu lors d'une partie jouée. Que vaut $G(\Omega)$? Déterminer la valeur maximale de x pour que l'espérance de gain soit positive.
4. On joue une partie. On constate que les jetons sont alignés.
Quelle est la probabilité, en fonction de x , que la fonction aléatoire ait été dérégulée ?

Énigme : les anniversaires (hors barème).

Le professeur de mathématiques d'une classe de ECE composée de 47 élèves propose le jeu suivant :

On suppose que personne ne connaît les dates d'anniversaire des élèves (hormis leur propre anniversaire bien entendu), et qu'aucun élève ne soit né lors d'une année bissextile.

Si au moins deux élèves ont la même date d'anniversaire, chaque élève donne 1€ au professeur. Dans le cas contraire, le professeur verse 15€ à chaque élève de la classe.

À la place de cette classe, accepteriez-vous de participer à ce jeu ? Justifier mathématiquement.

Indications : On pourra utiliser l'approximation suivante, valable pour $x \simeq 0$: $1 - x \simeq e^{-x}$, et la valeur approchée suivante : $\exp(-1081/365) \simeq 0,05$.

