

DS n° 4

Corrigé

Exercice 1 (adapté d'EML 2007)

Partie A

1. g est continue, dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, avec : $\forall x > 0, g'(x) = \frac{2x^2 + 1}{x} > 0$ (signe évident). g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, $\lim_{0^+} g = -\infty$ et $\lim_{+\infty} g = +\infty$, donc g réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ vers $] \lim_{0^+} g, \lim_{+\infty} g[=] -\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.
2. Puisque $0 \in \mathbb{R}$, le théorème de la bijection affirme qu'il existe une unique solution $\alpha > 0$ à l'équation $g(x) = 0$.
3. On a : $\begin{cases} g(1/2) = 1/4 - \ln 2 < 0 \\ g(1) = 1 > 0 \\ g(\alpha) = 0 \end{cases}$, donc, par stricte croissance de g , on en déduit que $1/2 < \alpha < 1$.
4. g^{-1} est définie sur $\mathbb{R}$, et dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$ tel que $g^{-1}(x) \neq 0$, c'est-à-dire, puisque g^{-1} est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. g^{-1} a la même monotonie que g , donc est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim_{-\infty} g^{-1} = 0$ et $\lim_{+\infty} g^{-1} = +\infty$.
On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$(g^{-1})'(x)$		$+$	
g^{-1}		0	$+\infty$

6. g^{-1} est dérivable en 0, et la formule de dérivation de la bijection réciproque donne (noter que $g^{-1}(0) = \alpha$) :

$$(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(g^{-1}(0))} = \frac{1}{g'(\alpha)} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1}.$$

Partie B

1. D'après la partie précédente, on a $x_0 = \alpha$.
De plus, x_1 est l'unique solution strictement positive de l'équation $g(x) = 1$, i.e. $x^2 + \ln x = 1$. 1 est solution évidente, et par unicité, on a $x_1 = 1$.
2. On a, pour $n \in \mathbb{N}$:
$$g(x_n) = n < n + 1 = g(x_{n+1}),$$

donc, par stricte croissance de g , on en déduit que $x_n < x_{n+1}$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
3. On va montrer la première inégalité demandée à la question suivante, à savoir : $x_n \geq \sqrt{n - \ln n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$g(\sqrt{n - \ln n}) = n - \ln n + \frac{1}{2} \underbrace{\ln(n - \ln n)}_{\leq \ln n} \leq n - \frac{1}{2} \ln n \leq n = g(x_n),$$

d'où, par croissance de g , $x_n \geq \sqrt{n - \ln n}$.

De plus, clairement, $\sqrt{n - \ln n} = \sqrt{n} \sqrt{1 - \frac{\ln n}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ (par croissance comparée, $\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$), donc
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.

4. On a déjà montré la minoration. La majoration se montre de manière analogue (mais plus facilement).
5. On divise les trois membres de l'encadrement obtenu par $\sqrt{n}$, et l'on obtient :

$$\sqrt{1 - \frac{\ln n}{n}} \leq \frac{x_n}{\sqrt{n}} \leq 1.$$

Par croissance comparée, le minorant et la majorant tendent vers 1, donc, d'après le théorème d'encadrement, $\frac{x_n}{\sqrt{n}}$ aussi.

Partie C

1. (a) f est continue, dérivable sur I comme somme de telles fonctions, et

$$\forall x \in I, f'(x) = \frac{-2x^2 + 4x - 1}{4x}.$$

L'étude du signe du trinôme au numérateur est classique : les racines sont $1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, et l'on déduit, puisque
 $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{2} < 1 < 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, que f' est strictement positive sur I .

- (b) Facile.
- (c) Si $1/2 \leq x \leq 1$, alors $f(1/2) \leq f(x) \leq f(1)$ (croissance de f), et l'encadrement de la question précédente montre que $f(x) \in I$.
2. (a) Récurrence classique.
- (b) Idem.
- (c) On a, pour $x > 0$: $f(x) = x \iff x^2 + \ln x = 0 \iff x = \alpha$.
L'unique point fixe de f dans $\mathbb{R}^{+*}$ est α , et d'après la question A.3., on a bien $\alpha \in I$.
- (d) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, minorée par $1/2$, donc converge (théorème de la limite monotone), et vers un point fixe de f dans I , c'est-à-dire forcément vers α .
- (e) et (f)

```
PROGRAM mat;
var u:real;
n : integer;
function f(x:real):real;      {on définit la fonction f}
begin
f:=x-sqr(x)/4-ln(x)/4;
end;
function diff(x:real):real;    {on calcule la différence |f(x)-x|}
begin
diff:=abs(f(x)-x);
end;
begin
n:=0;
u:=1;
while diff(u)>0.001 do        {tant que la différence est trop grande, on augmente n}
begin
u:=f(u);
n:=n+1;
end;
writeln('Le plus petit entier n cherché est : ',n);
end.
```

Exercice 2 (inspiré d'un exercice d'oral)

- On a : $X(\Omega) = \llbracket 2, +\infty \rrbracket$.
- On a :

$$\begin{cases} (X=2) &= P_1 \cap P_2 \\ (X=3) &= F_1 \cap P_2 \cap P_3 \\ (X=4) &= (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \end{cases}, \text{ d'où } \begin{cases} p_2 = P(P_1 \cap P_2) = P(P_1) \times P(P_2) = 4/9 \\ p_3 = 4/27 \\ p_4 = 4/81 + 8/81 = 4/27, \end{cases}$$

où l'on a utilisé l'indépendance des P_i .

- C'est évident quand on y réfléchit un peu... On ne peut pas commencer par deux pile si $X \geq 2$.
- On utilise la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_n &= P(X=n) = P(X=n | P_1) P(P_1) + P(X=n | F_1) P(F_1) \\ &= P(X=n | P_1 \cap F_2) P(P_1 \cap F_2) + P(X=n | F_1) P(F_1) \quad \text{d'après la question précédente.} \\ &= \frac{2}{9} P(X=n | P_1 \cap F_2) + \frac{1}{3} P(X=n | F_1). \end{aligned}$$

Calculons $P(X=n | P_1 \cap F_2)$. Sachant $P_1 \cap F_2$ (les deux premiers lancers sont donc fixés), l'événement $(X=n)$ revient à effectuer $n-2$ lancers pour obtenir, pour la première fois, un double pile. On a donc $P(P(X=n | P_1 \cap F_2)) = P(X=n-2)$.

De même, si l'on fixe le premier lancer à face, alors l'événement $(X=n)$ revient à effectuer $n-1$ lancers pour obtenir, pour la première fois, un double pile. On a donc $P(P(X=n | F_1)) = P(X=n-1)$.

On obtient alors la relation de récurrence annoncée dans l'énoncé.

- Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, que l'on peut étudier comme telle, ou bien effectuer une récurrence à deux pas.
- On a, pour $q \in]-1, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = q \times \sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{q}{(1-q)^2}$, en dérivant l'égalité suivante, valable pour $|x| < 1$:

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n.$$

On a donc (sous réserve de convergence des séries) :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} np_n = \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{4}{3^{n+1}} ((-1)^n + 2^{n-1}) \\ &= \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{1}{3^n} ((-1)^n + 2^{n-1}) = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} n \left[\left(\frac{-1}{3} \right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^n \right] \\ &= \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{-1}{3} \right)^n + \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{2}{3} \right)^n \end{aligned}$$

D'après la formule rappelée plus haut, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{-1}{3} \right)^n = -\frac{1}{16} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{2}{3} \right)^n = 1,$$

d'où finalement $E(X) = \frac{15}{4}$.

- On procède de même qu'à la question précédente, en dérivant une fois de plus la relation

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n.$$

On trouve alors que $\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$, et donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^n + \sum_{n=0}^{+\infty} nq^n \\ &= q^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} nq^n \\ &= q^2 \frac{2}{(1-q)^3} + \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{q(q+1)}{(1-q)^3}. \end{aligned}$$

On obtient alors de la même manière que précédemment $E(X^2) = \frac{159}{8}$.

On obtient finalement $\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{159}{8} - \left(\frac{15}{4} \right)^2 = \frac{93}{16}$. Ouf!

Problème (EDHEC 2003 – corrigé de Pierre Veuillez)

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : le joueur gagne la $n^{\text{ième}}$ partie.

De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \quad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \quad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \quad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$$

- On admet que (E_n, F_n, G_n, H_n) est un système complet d'événements.

- Avec le SCE précédent, on a :

$$P(E_{n+1}) = P_{E_n}(E_{n+1}) P(E_n) + P_{F_n}(E_{n+1}) P(F_n) + P_{G_n}(E_{n+1}) P(G_n) + P_{H_n}(E_{n+1}) P(H_n)$$

Hors, quand G_n est réalisé, on a $\overline{A_n}$, donc $E_{n+1} = A_{n-1} \cap A_n$ ne peut pas être réalisé, et $P_{G_n}(E_{n+1}) = 0$

De même $P_{H_n}(E_{n+1}) = 0$

Si E_n est réalisé, il a gagné en $n-1$ et n donc il gagnera la suivante avec une probabilité de $\frac{2}{3}$. Comme

$$E_{n+1} = A_n \cap A_{n+1} \text{ alors } P_{E_n}(E_{n+1}) = \frac{2}{3}$$

Si F_n est réalisé, il a perdu en $n-1$ et gagné n donc il gagnera la suivante avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ alors

$$P_{F_n}(E_{n+1}) = \frac{1}{2}$$

Finalement, $P(E_{n+1}) = \frac{2}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n)$ pour $n \geq 2$

- De la même façon (N.B. l'énoncé donne le résultat juste en dessous ! il suffit de le recopier puisque "aucune explication n'est exigée").

$$- P(F_{n+1}) = P(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) = \frac{1}{2}P(G_n) + \frac{1}{3}P(H_n)$$

$$- P(G_{n+1}) = P(A_n \cap \overline{A_{n+1}}) = \frac{1}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n)$$

$$- P(H_{n+1}) = P(\overline{A_n} \cap \overline{A_{n+1}}) = \frac{1}{2}P(G_n) + \frac{2}{3}P(H_n)$$

$$(c) \text{ On a } U_{n+1} = \begin{pmatrix} P(E_{n+1}) \\ P(F_{n+1}) \\ P(G_{n+1}) \\ P(H_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n) \\ \frac{1}{2}P(G_n) + \frac{1}{3}P(H_n) \\ \frac{1}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n) \\ \frac{1}{2}P(G_n) + \frac{2}{3}P(H_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix}$$

Donc $U_{n+1} = MU_n$

$$2. (a) \text{ On a } PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 10I$$

Donc $P \frac{1}{10}Q = I$ et P inversible, d'inverse $P^{-1} = \frac{1}{10}Q$

$$(b) \text{ On trouve, après calcul, que } D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

3. (a) Pour $n = 0$, on a $M^0 = I = P I P^{-1} = P D^0 P^{-1}$
 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $M^n = P D^n P^{-1}$ alors
 $M^{n+1} = M^n M = P D^n P^{-1} P D P^{-1} = P D^n D P^{-1} = P D^{n+1} P^{-1}$
 Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = P D^n P^{-1}$.
- (b) Pour $n = 2$, on a $M^{2-2} U_2 = I U_2 = U_2$
 Soit $n \geq 2$ tel que rence, que $U_n = M^{n-2} U_2$ alors $U_{n+1} = M U_n = M M^{n-2} U_2 = M^{n-1} U_2$
 Donc $\forall n \geq 2$, $U_n = M^{n-2} U_2$.
- (c) **N.B.** il est inutile de calculer le produit $M^n = P D^n P^{-1}$ entier. Il suffit d'en calculer la première colonne.
 Et pour cela de faire le produit par la première colonne de gauche à droite. M^n a pour première colonne

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ 2\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n + 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \\ 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \\ -2\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et comme $U_n = M^{n-2} U_2$ et que $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ puisque'il a gagné les deux premières parties, U_n est alors la

première colonne de M^{n-2} d'où

$$\begin{aligned} -P(E_n) &= \frac{1}{10} \left(-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} + 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 3 \right), \\ -P(F_n) &= \frac{1}{10} \left(2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 2 \right) \\ -P(G_n) &= \frac{1}{10} \left(-2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 2 \right) \text{ et} \\ -P(H_n) &= \frac{1}{10} \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} - 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 3 \right) \end{aligned}$$

- (d) Et quand $n \rightarrow +\infty$, comme $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2}$ ont des valeurs absolues strictement inférieures à 1 alors $\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}$, $\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2}$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ tendent vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. Et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n) = \frac{3}{10} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(F_n) = \frac{2}{10} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(G_n) = \frac{2}{10} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(H_n) = \frac{3}{10}$$

4. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur gagne la $k^{\text{ième}}$ partie et qui vaut 0 sinon (X_1 et X_2 sont donc deux variables certaines).

- (a) Pour gagner la $k^{\text{ième}}$ partie, le joueur peut avoir gagné ou perdu la $k-1^{\text{ème}}$ donc $A_k = E_k \cup F_k$
- (b) Comme les deux sont incompatibles,

$$\begin{aligned} P(X_k = 1) &= P(A_k) = P(E_k) + P(F_k) \\ &= \frac{1}{10} \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-2} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + 5 \right), \end{aligned}$$

et donc X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{10} \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-2} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + 5 \right)$.