

NOM :
PRÉNOM :

ECE 5
Année 2010-2011

DM n° 2 : ESPACES VECTORIELS
À rédiger sur cette feuille, et à rendre vendredi 27 mai

Lycée Ozenne
Toulouse

Exercice 1. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$u_1 = (1, 2, -1, -2) \quad u_2 = (-2, -5, 0, 3) \quad u_3 = (1, 1, -3, -3) \quad u_4 = (-1, -3, -1, 1).$$

Soit $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

1. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ? Sinon, expliciter une relation non triviale liant u_1, u_2 et u_3 .
2. Calculer $\dim F$.
3. u_4 appartient-il à F ? Si oui, donner une écriture de u_4 comme combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3 .

4. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ -2x_1 - 5x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Quelle est la nature de l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions ?

Exercice 2. Dire pour chacune des parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes, s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ ou pas. On justifiera la réponse en donnant une base quand il s'agit d'un sous-espace vectoriel, et en donnant un contre-exemple dans le cas contraire.

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x + 1\}$ ☐ Vrai ☐ Faux

$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (2x - y)^2 = 0\}$ ☐ Vrai ☐ Faux

$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ ☐ Vrai ☐ Faux

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ☐ Vrai ☐ Faux

$E = \{(0, \ln t) \mid t \in]0, +\infty[\}$ ☐ Vrai ☐ Faux