Exercice 5 feuille 14 (par Mme Fritz)

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Dresser son tableau de variations complet.
   f est strictement croissante et continue sur $]-\infty, -1[$ donc établit une bijection de $]-\infty, 1[$ sur $]-\infty, 3[$: comme $0 \in]-\infty, 3[$, il existe une unique solution $\alpha \in]-\infty, -1[$ telle que $f(\alpha) = 0$.
   De même f est bijective de $[-1, 1]$ sur [-1,3] donc comme $0 \in [-1, 3]$, il existe une unique solution $\beta \in [-1, 1]$ telle que $f(\beta) = 0$. Comme $f(-1) = 3 \neq 0$ et $f(1) = -1 \neq 0$, $\beta \in]-1, 1[$.
   Enfin, f établit une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]-1, +\infty[$ ....
   remarque : Ici, vu qu'on ne demande pas "3 et 3 seulement " solutions, on peut regarder directement f sur]-1,1[pour obtenir $\beta \in]-1, 1[$.

2.a) $f(0) = 1$, $f(\beta) = 0$ et $f(1/2) = -3/8$ donc on obtient $f(1/2) \leq f(\beta) \leq f(0)$,
   et par stricte décroissance de f, on en déduit $1/2 \geq \beta \geq 0$.
   De plus, $f(\beta) = 0 \Leftrightarrow \beta^3 - 3\beta + 1 = 0 \Leftrightarrow \beta^3 + 1 = 3\beta \Leftrightarrow \frac{\beta^3+1}{3} = \beta$.

b) Tableau de variations de g dérivable sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = x^2$.
   On trouve $g([0, 1/2]) = [\frac{1}{3}, \frac{3}{8}] \subset [0, \frac{1}{2}]$ car $3/8 \leq 4/8 = 1/2$. Et l'intervalle $[0, 1/2]$ est stable par g.
   De plus $g'(x) = x^2$ et $0 \leq x \leq 1/2 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1/4$ par croissance de $x \to x^2$ sur $\mathbb{R}^+$, ce qui donne $0 \leq g'(x) \leq 1/4 \Rightarrow |g'(x)| \leq 1/4$.

c) [0,1/2] est un intervalle stable de g qui contient $u_0 = 0$: donc (par récurrence), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 2]$.

d) g est continue et dérivable sur $[0, 1/2]$, et $\forall x \in [0, 2]$, $|g'(x)| \leq 1/4$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis appliqués aux points $u_n \in [0, 2]$, et $\beta \in [0, 2]$,
   $|g(u_n) - g(\beta)| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta|$. Or $g(u_n) = u_{n+1}$ et par 2.a), $g(\beta) = \beta$ d'où $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta|$.
   Montrons alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \beta| \leq (\frac{1}{4})^n \frac{1}{2}$.
   cas $n = 0$: $|u_0 - \beta| = |\beta| \leq 1/2$ par 2.a) et $(\frac{1}{4})^0 \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ d'où le résultat.
   hérédité : supposons que pour un certain n, $|u_n - \beta| \leq (\frac{1}{4})^n \frac{1}{2}$.
   Alors comme $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta|$, on obtient par H.R., $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}(\frac{1}{4})^n \frac{1}{2} = (\frac{1}{4})^{n+1} \frac{1}{2}$.
   conclure : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \beta| \leq (\frac{1}{4})^n \frac{1}{2}$.
   Comme $|\frac{1}{4}| < 1$, $(\frac{1}{4})^n \frac{1}{2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $|u_n - \beta| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \beta$.

e) Si n est tel que $(\frac{1}{4})^n \frac{1}{2} \leq 10^{-9}$ alors $|u_n - \beta| \leq (\frac{1}{4})^n \frac{1}{2} \leq 10^{-9}$.
   Puis $(\frac{1}{4})^n \frac{1}{2} \leq 10^{-9} \Leftrightarrow (\frac{1}{4})^n \leq 2.10^{-9} \Leftrightarrow n \ln(1/4) \leq \ln(2.10^{-9})$ par stricte croissance de ln
   $\Leftrightarrow -n \ln(4) \leq \ln(2) - 9 \ln(10) \Leftrightarrow n \geq \frac{9 \ln(10) - \ln(2)}{\ln(4)}$.
   Le premier entier qui convient est le premier entier supérieur à $\frac{9 \ln(10) - \ln(2)}{\ln(4)}$ càd $n_0 = Ent(\frac{9 \ln(10) - \ln(2)}{\ln(4)}) + 1$.
   Une valeur approchée de β à 10^{-9} près est alors donnée par u_{n_0}.

f) Il suffit donc d'écrire un programme qui calcule n_0 puis renvoie u_{n_0}

```
Program suite3;
Var n,k : integer; u :real;
Begin
u :=0;
n := trunc[(9ln(10) − ln(2))/ln(4)]+1;
For k :=1 to n do
u :=(u*u*u+1)/3;
Writeln('une valeur approchée de beta est ',u);
End.
```

Exercice 7 feuille 15

1. Il s'agit d'obtenir un encadrement d'une intégrale. On va donc encadrer l'intégrande.
   Il est clair que si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant \ln(2) < 1$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant \big(\ln(1+x)\big)^n < 1$, donc en particulier $I_n \geqslant 0$.
   De plus, on a alors : $\big(\ln(1+x)\big)^{n+1} = \big(\ln(1+x)\big)^n \times \ln(1+x) < \big(\ln(1+x)\big)^n$, donc $I_{n+1} \leqslant I_n$, comme voulu.

2. On va intégrer par parties :

$$
\begin{aligned}
I_{n+1} = \int_0^1 \big(\ln(1+x)\big)^{n+1} \,\mathrm{d}x &= \int_0^1 1 \times \big(\ln(1+x)\big)^{n+1} \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 u'(x)v(x) \,\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

   où u et v sont les deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur [0.1] définies par $u(x) = x$ et $v(x) = \big(\ln(1+x)\big)^{n+1}$.

On obtient alors, en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \Big[x\big(\ln(1+x)\big)^{n+1}\Big]_0^1 - \int_0^1 (n+1)\frac{x\big(\ln(1+x)\big)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \big(\ln(2)\big)^{n+1} - (n+1)\int_0^1 \big(\ln(1+x)\big)^n \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \big(\ln(2)\big)^{n+1} - (n+1)\int_0^1 \big(\ln(1+x)\big)^n \left(1-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \big(\ln(2)\big)^{n+1} - (n+1)\int_0^1 \big(\ln(1+x)\big)^n\,\mathrm{d}x + (n+1)\int_0^1 \big(\ln(1+x)\big)^n \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \big(\ln(2)\big)^{n+1} - (n+1)I_n + (n+1)\left[\frac{\big(\ln(1+x)\big)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\
&= \big(\ln(2)\big)^{n+1} - (n+1)I_n + \big(\ln(1+2)\big)^{n+1} \\
&= 2\big(\ln(2)\big)^{n+1} - (n+1)I_n,
\end{aligned}$$

comme voulu.

3. On en déduit alors immédiatement que : $(n+1)I_n = 2\big(\ln(2)\big)^{n+1} - I_{n+1} \leqslant 2\big(\ln(2)\big)^{n+1}$ car $I_n \geqslant 0$.
   D'autre part, $(n+2)I_n = 2\big(\ln(2)\big)^{n+1} - I_{n+1} + I_n \geqslant 2\big(\ln(2)\big)^{n+1}$, car $I_n - I_{n+1} \geqslant 0$.
4. De la première inégalité obtenue dans la question précédente, il vient : $I_n \leqslant \dfrac{2\big(\ln(2)\big)^{n+1}}{n+1}$.
   De la deuxième, il vient : $I_n \geqslant \dfrac{2\big(\ln(2)\big)^{n+1}}{n+2}$, d'où l'encadrement : $\dfrac{2\big(\ln(2)\big)^{n+1}}{n+2} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{2\big(\ln(2)\big)^{n+1}}{n+1}$.
5. On en déduit donc que : $\dfrac{n}{2\big(\ln(2)\big)^{n+1}}\dfrac{2\big(\ln(2)\big)^{n+1}}{n+2} \leqslant \dfrac{n}{2\big(\ln(2)\big)^{n+1}}I_n \leqslant \dfrac{n}{2\big(\ln(2)\big)^{n+1}}\dfrac{2\big(\ln(2)\big)^{n+1}}{n+1}$, d'où

$$\frac{n}{n+2} \leqslant \frac{n}{2\big(\ln(2)\big)^{n+1}}I_n \leqslant \frac{n}{n+1}.$$

   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{n+1} = 1$, on obtient, d'après le théorème d'encadrement, que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{2\big(\ln(2)\big)^{n+1}}I_n = 1$.

Exercice "Fixation de prix en micro-économie"

7. La condition s'écrit $20(1000 - P_V) + 5(2000 - P_V - 4P_N) = 10000$, soit encore $5P_V + 4P_N - 4000 = 0$.
8. On veut optimiser la quantité $f(x,y) = -x^2+1500x-4y^2+2400y-xy-60000$ sous la contrainte $g(x,y) = 5x+4y-4000 = 0$.
   Le Langrangien s'écrit alors : $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (-x^2+1500x-4y^2+2400y-xy-60000) + \lambda(5x+4y-4000)$.
9. Il s'agit de trouver les points critiques du Lagrangien, en résolvant le système (prenez le temps de le résoudre parfaitement !) :

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) & = -2x+1500-y+5\lambda = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) & = -8y+2400-x+4\lambda = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) & = 5x+4y-4000 = 0
\end{cases}
\iff
\begin{cases}
2x+y-5\lambda = 1500 \\
x+8y-4\lambda = 2400 \\
5x+4y = 4000
\end{cases}
\iff
\begin{cases}
x = 625 \\
y = 218,75 \\
\lambda = -6,25.
\end{cases}$$

   La résolution de ce système est plus simple quand on simplifie les équations au maximum ! On peut alors procéder à des opérations sur les lignes pour éliminer les variables successivement, ou procéder par substitution (exprimer y en fonction de x avec la dernière équation, puis λ en fonction de x avec la deuxième, et trouver x avec la première... Cette méthode fonctionne, mais n'est pas la plus performante).
   Le profit obtenu vaut alors, après calculs, $f(625, 218.75) = 143750$ euros.

11. Pour obtenir un profit de 144000 euros (obtenu avec $x = 640$ et $y = 220$), le patron avait utilisé comme main d'œuvre : $20(1000-640)+5(2000-640-4\times 220) = 9600$ heures, soit moins que les 10000 heures qu'il utilise pour obtenir un profit maximum de 143750 euros. Il a donc tort de vouloir utiliser complètement les 10000 heures disponibles.
12. Pour résoudre ce problème, on aurait pu utiliser la contrainte $g(x,y) = 5x+4y-4000 = 0$ pour exprimer y en fonction de x : $y = \dfrac{4000-5x}{4}$. On aurait alors eu à optimiser la fonction $f\left(x, \dfrac{4000-5x}{4}\right)$, qui est une fonction d'une seule variable, que l'on sait étudier depuis la Terminale.