Complément de cours

DÉNOMBREMENT

Applications strictement croissantes entre $[\![1,n]\!]$ et $[\![1,p]\!]$

Nous allons établir le résultat suivant :

Théorème. *Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$ deux entiers strictement positifs.*
Le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1,n]\!]$ vers $[\![1,p]\!]$ vaut $\displaystyle\binom{p}{n}$.

Remarque. *Une applications strictement croissante est injective. En particulier, pour une telle application f, on a $\mathrm{Card}(\mathrm{Im}\, f) = n$. D'autre part, puisque $\mathrm{Im}\, f \subset [\![1,p]\!]$, on a $n \leqslant p$. Ainsi, si $n > p$, il n'y a pas d'application strictement croissante de $[\![1,n]\!]$ vers $[\![1,p]\!]$, ce que l'on retrouve bien dans le théorème puisqu'alors $\binom{p}{n} = 0$.*

Preuve n^o 1, par dénombrement direct
Soit $f : [\![1,n]\!] \to [\![1,p]\!]$ une application strictement croissante. Alors f est nécessairement injective. Pour construire f, il faut déjà se donner une telle injection (A_p^n choix). Parmi toutes ces injections, un certain nombre ont la même image $\mathrm{Im}\, f = \{f(1),\dots,f(n)\}$: il y en a $n!$ pour chaque image différente (c'est le nombre de façons de permuter les n éléments de $\mathrm{Im}\, f$). Or parmi $n!$ injections de même image, une seule est strictement croissante. Le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1,n]\!]$ vers $[\![1,p]\!]$ vaut donc $\frac{A_p^n}{n!} = \binom{p}{n}$.

Explication : On a regroupé les injections de $[\![1,n]\!]$ vers $[\![1,p]\!]$ en paquets disjoints de cardinal $n!$, suivant leur image $\mathrm{Im}\, f$ (il s'agit d'une partition de l'ensemble des injections). Il y a donc $\frac{A_p^n}{n!} = \binom{p}{n}$ tels paquets. Dans chaque paquet, il y a une et une seule application strictement croissante. Il y a donc $\binom{p}{n}$ telles applications en tout. ∎

Preuve n^o 2, « bijective »
Soit $\mathscr{P}_n([\![1,p]\!])$ l'ensemble des parties de $[\![1,p]\!]$ de cardinal n. On note également $\mathscr{F}^{sc}(n,p)$ l'ensemble des applications strictement croissantes de $[\![1,n]\!]$ vers $[\![1,p]\!]$. On définit alors l'application φ suivante :

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathscr{F}^{sc}(n,p) \longrightarrow \mathscr{P}_n([\![1,p]\!]) \\ \quad f \qquad\longmapsto \{f(1),\dots,f(n)\} \end{cases}$$

Notons que $\{f(1),\dots,f(n)\}$ est bien de cardinal n si f est strictement croissante (injective suffit), d'après la remarque du préambule.

- D'une part, φ est injective.
  En effet, si $f,g \in \mathscr{F}^{sc}(n,p)$ vérifient $\varphi(f) = \varphi(g)$, alors $\{f(1),\dots,f(n)\} = \{g(1),\dots,g(n)\}$. Puisque $f(1) < \cdots < f(n)$ et $g(1) < \cdots < g(n)$, on a $f(k) = g(k)$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. On a donc montré que $f = g$.
- D'autre part, φ est surjective. En effet, étant donné une partie $I \in \mathscr{P}_n([\![1,p]\!])$, on peut écrire $I = \{i_1,\dots,i_n\}$ avec $i_1 < \cdots < i_n$ (on range les éléments de I par ordre croissant). On peut alors définir une application $f\colon [\![1,n]\!] \to [\![1,p]\!]$ en posant $f(k) = i_k$. f est alors strictement croissante, et $\varphi(f) = \{f(1),\dots,f(n)\} = \{i_1,\dots,i_n\} = I$: f est un antécédent de I par φ.

Finalement, on a montré que φ était bijective. En particulier, $\mathrm{Card}\, \mathscr{F}^{sc}(n,p) = \mathrm{Card}\, \mathscr{P}_n([\![1,p]\!]) = \binom{p}{n}$, comme attendu. ∎

Remarque. *La preuve précédente est la version rigoureuse du fait (« intuitif » ?) suivant :*
se donner une application strictement croissante de $[\![1,n]\!]$ vers $[\![1,p]\!]$ revient à choisir une partie de $[\![1,p]\!]$ de cardinal n (qui constituera son image, l'ordre des éléments étant imposé par la croissance stricte).