Fiche n° 9

Comparaison de suites réelles

Exercice 1. Déterminer un équivalent (le plus simple possible) des suites de terme général u_n suivantes, et en déduire leur limite éventuelle :

$$u_n = \frac{n^3 + n\sin(n^{10}+n^7)}{n+\ln n} \qquad u_n = n^2(\ln n)^4 - n^3(\ln n)^2 + (-1)^n n^2 e^{-n} \qquad u_n = \frac{n+\sqrt{n}\ln n}{\sqrt{n+2}}$$

$$u_n = \ln(2n^{15}) + 15n^2 \qquad u_n = \ln\left(\frac{n^2+3n+6}{n^2+1}\right) \qquad u_n = \ln(3n^{10}+1)$$

$$u_n = \ln\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\right) \qquad u_n = n^2\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \qquad u_n = \exp(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) - 1.$$

$$u_n = \frac{\ln(n^3+1)}{n^2-n+2} \qquad u_n = \frac{n^3+n+1}{n+\sqrt{n}}e^{-n} \qquad u_n = \frac{n^3+5n+2}{3^n+3(-1)^n}$$

$$u_n = 3^{2n} + 2^{3n}, \qquad u_n = e^n + e^{2n} - \sqrt{e^n}, \qquad u_n = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$$

$$u_n = \ln(2 - e^{\frac{1}{n}}), \qquad u_n = \ln(\frac{2n^2+1}{n^2+n+1}), \qquad u_n = \frac{\sqrt{1+e^{-n}}-1}{e^{-2n}}$$

$$u_n = (2n)^{\frac{1}{n}} - 1, \qquad u_n = \sqrt{e^{\frac{1}{n}}} - 1, \qquad u_n = \left(\tan(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n})\right)^n.$$

Exercice 2. Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Démontrez-la (où citez la proposition du cours à laquelle elle fait référence) dans le premier cas, et donnez un contre-exemple dans le second cas.

1. Si $u_n \sim v_n$ et si v_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{u_n}{v_n} \sim 1$.
2. Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}$), alors $u_n \sim \ell$.
3. Si $u_n \sim v_n$, alors $(u_n - v_n)$ est une suite qui tend vers 0.
4. Si $u_n \sim v_n$, alors $n + u_n \sim n + v_n$
5. Si $u_n \sim v_n$ et si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, alors $n + u_n \sim n + v_n$.
6. Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n)^n = 1$.
7. Il existe une suite (u_n) telle que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n)^n = +\infty$.
8. Il existe une suite (u_n) telle que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n)^n = 0$.
9. Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$, alors $(u_n)^n \sim 2^n$.
10. Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n)^n = +\infty$.