Fiche n° 8
Suites réelles

Exercice 1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez.

1. Si une suite est bornée à partir d'un certain rang, alors elle est bornée.
2. Si (u_n) est bornée, alors elle converge.
3. Si (u_n) converge, alors (u_n) est bornée.
4. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et si (u_n) converge vers ℓ, alors $\ell > 0$.
5. La suite $\left(\dfrac{\cos(n^3)}{n+1}\right)$ est convergente.
6. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$, et si $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \ell$.

Exercice 2. Déterminer si les suites suivantes ont une limite, et si oui, la calculer.
On pourra utiliser le théorème suivant :

Théorème (de composition des limites).
Soient ℓ et L appartenant à $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et soit f une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles.

$$\text{Si } \lim_{n\to\infty} u_n = \ell \text{ et } \lim_{x\to\ell} f(x) = L, \text{ alors } \lim_{n\to\infty} f(u_n) = L.$$

1. $\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
2. $\left(\ln(n^2+2)\right)_{n\in\mathbb{N}}$
3. $(\exp(n-\sqrt{n}))_{n\in\mathbb{N}}$
4. $\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
5. $\left((-1)^n + \dfrac{1}{\ln(n+4)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
6. $(\exp(n+(-1)^n))_{n\in\mathbb{N}}$
7. $\left(\dfrac{\exp(2n)}{\exp(3n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
8. $(\exp(2n)-\exp(3n))_{n\in\mathbb{N}}$
9. $\left(e^{-2n}-e^{-3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
10. $\left(\dfrac{(e^n)^2}{e^{2n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
11. $(\exp(2-\ln(3+n)))_{n\in\mathbb{N}}$
12. $\left((e^{2n})^3-(e^{3n})^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$
13. $\left((ne^{2n})^3-(2ne^{3n})^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$
14. $\left(\dfrac{50n^4+8n^3}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
15. $\left(\dfrac{2n^3+n\sin n}{n^3+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
16. $\left(\ln(n^3+1)-3\ln(n+2)\right)_n$
17. $\left(\dfrac{(-1)^{2n}+2n}{(-1)^{3n}+3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
18. $\left(\dfrac{(-1)^n n^2+3n+1}{10n^2+10}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
19. $\left(\dfrac{E(\frac{4n}{5})}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
20. $\left(E(\frac{n}{2})-\frac{n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
21. $\left(\ln(1+\frac{1}{n})\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$
22. $\left((-1)^n\ln(1+\dfrac{1}{n+1})\right)$
23. $(\ln(\sqrt{n})-\ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$
24. $(\ln(n+1)-\ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$
25. $\left(\dfrac{3^n-2^n}{3^{n+2}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
26. $(5^n-5^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$
27. $\left(3^{2n}-6^{2n}+2^{-3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
28. $\left(E(\dfrac{n^3+1}{n^2})\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice 3. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dbinom{2n}{n}$ est croissante. Est-elle convergente ?

Exercice 4. Soit la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{\cos(2u_n)}{\sqrt{n+1}}$. Montrer que cette suite converge.

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et positif.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$ (on pourra faire apparaître une quantité conjuguée).
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 2| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge t-elle ? Si oui, quelle est sa limite ?

Exercice 6. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{3}{u_n})$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Montrer qu'elle est minorée par $\sqrt{3}$.
3. Montrer qu'elle converge vers $\sqrt{3}$.

Exercice 7. Soit :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x^2 + 2x \end{array}$$

et soit (u_n) la suite définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. $(a \in \mathbb{R})$

1. Tracer le graphe de f.
2. Déterminer graphiquement le comportement en $+\infty$ de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants : $a = \frac{1}{2}$, $a = \frac{3}{2}$, $a = 3$, $a = -1$.
3. Si $a \in]0,1[$, montrer que la suite converge et déterminer sa limite.

Exercice 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Que peut-on en conclure ?

Exercice 9. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par :
$a_0 = a$, $b_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}. \end{cases}$.

1. Montrer que ces deux suites sont bien définies.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} \geq a_{n+1}$.
3. En déduire que (a_n) est croissante et que (b_n) est décroissante.
4. Montrer que ces deux suites sont convergentes.
5. En déduire qu'elles sont adjacentes.

Exercice 10. Pour tout $n \in [\![3, +\infty[\![$, on pose $(E_n)\ :\ x^n + x^2 + 2x - 1 = 0$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. Soit x_n cette solution.
2. Montrer que $\forall n \geq 3,\ x_n \in]0,1[$.
3. Monter que la suite $(x_n)_{n\geq 3}$ est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$.
4. Montrer que $(x_n)_{n\geq 3}$ converge et calculer sa limite.

Indication : on pourra étudier les variations de la fonction $f_n : x \mapsto x^n + x^2 + 2x - 1$.