Fiche n° 6

Suites récurrentes

Exercice 1. Déterminer le terme général des suites suivantes en fonction de n :

1. $u_0 = -3, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -u_n.$
2. $u_3 = 1, \quad \forall n \in [\![3, +\infty[\![, \quad u_{n+1} = u_n + 2.$
3. $u_1 = 2, \quad \forall n \in [\![1, +\infty[\![, \quad u_{n+1} = u_n.$
4. $u_2 = 0, \quad \forall n \in [\![2, +\infty[\![, \quad u_{n+1} = -3u_n.$
5. $u_0 = -2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n - 4.$
6. $u_1 = 1, \quad \forall n \in [\![1, +\infty[\![, \quad u_{n+1} = -u_n + 2.$

Exercice 2. On considère la fonction :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x-4}{x-3}, \end{array}$$

et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 3}$.

1. Montrer que $\forall x \in]-\infty, 2[\,,\ f(x) < 2$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 2$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
4. On pose :
   $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \dfrac{1}{u_n - \alpha}$.
   Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.
5. En déduire l'expression de u_n en fonction de n. Quelle est la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 3. Déterminer le terme général des suites suivantes en fonction de n :

1. $u_0 = -1,\ u_1 = 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$
2. $u_1 = 3,\ u_2 = 17, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n.$
3. $u_0 = 1,\ u_1 = -2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{2}u_{n+2} - 3u_{n+1} + 6u_n = 0.$
4. $u_0 = 0,\ u_1 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 15u_n + 6.$
5. $u_0 = 1,\ u_1 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 5u_{n+1} + 6u_n = 0.$

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2}$.
2. Réciproquement, montrer que si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.