Fiche n^o 5

PROBABILITÉS

Exercice 1. Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6.

1. On tire au hasard, successivement et sans remise, trois boules dans l'urne. Quelle est la probabilité que la troisième boule tirée porte le numéro 2 ? Quelle est la probabilité que la troisième boule tirée porte un numéro pair ?
2. Une boîte comporte six compartiments numérotés de 1 à 6. On place les six boules, au hasard, une par compartiment. Quelle est la probabilité pour que quatre boules exactement soient dans un compartiment ayant le même numéro que la boule ? Même question en remplaçant "exactement" par "au moins".
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On effectue k tirages successifs au hasard d'une boule avec remise. Calculer la probabilité de tirer au moins une fois la boule portant le numéro 6.

Exercice 2. Une urne contient 6 boules indiscernables au toucher : quatre vertes et deux jaunes. On tire au hasard, deux fois de suite, deux boules simultanément, les boules n'étant pas remises dans l'urne. On note A, B, C, D les événements suivants :

A : aucune boule verte n'est tirée au cours du premier tirage de deux boules.
B : une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du premier tirage de deux boules.
C : deux boules vertes sont tirées au cours du premier tirage de deux boules.
D : une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du deuxième tirage de deux boules.

1. Calculer $\mathbb{P}_A(D)$, $\mathbb{P}_B(D)$, et $\mathbb{P}_C(D)$.
2. En déduire les probabilités des événements $D \cap A$, $D \cap B$ et $D \cap C$.
3. Calculer la probabilité de l'événement D.

Exercice 3. Dans une entreprise, on fait appel à un technicien lors de ses passages hebdomadaires, pour l'entretien des machines. Chaque semaine, on décide donc pour chaque appareil de faire appel ou non au technicien. Pour un certain type de machines, le technicien constate :

1. qu'il doit intervenir la première semaine,
2. que s'il est intervenu la $n^{\text{ième}}$ semaine, la probabilité qu'il intervienne la $(n+1)^{\text{ième}}$ semaine est égale à $\dfrac{3}{4}$.
3. que s'il n'est pas intervenu la $n^{\text{ième}}$ semaine, la probabilité qu'il intervienne la $(n+1)^{\text{ième}}$ semaine est égale à $\dfrac{1}{10}$.

On désigne par E_n l'évènement : « le technicien intervient la n^{ieme} semaine » et par p_n la probabilité de E_n.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque. Déterminer $\mathbb{P}(E_1)$, $\mathbb{P}_{E_n}(E_{n+1})$, $\mathbb{P}_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$, puis, en fonction de p_n, déterminer $\mathbb{P}(E_{n+1} \cap E_n)$ et $\mathbb{P}(E_{n+1} \cap \overline{E_n})$.
2. En déduire que pour tout entier naturel non nul n, on a : $\quad p_{n+1} = \dfrac{13}{20}p_n + \dfrac{1}{10}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $q_n = p_n - \dfrac{2}{7}$. Montrer que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique et déterminer q_n en fonction de n.
4. En déduire p_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 4. Application de la formule des probabilités composées.

Une urne contient 3 boules noires et 4 boules blanches. On tire au hasard, successivement et sans remise, 4 boules de cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches puis deux boules noires dans cet ordre ?

Exercice 5. Application de la formule des probabilités totales.

On dispose d'un dé non pipé et de six urnes numérotées de 1 à 6 qui contiennent des boules blanches et des boules noires, toutes indiscernables entre elles. Pour tout $i \in [\![1, 6]\!]$, l'urne numéro i contient i boules blanches et $6 - i$ boules noires. On considère l'expérience aléatoire suivante :
On lance le dé. On tire au hasard une boule dans l'urne dont le numéro est le chiffre obtenu avec le dé.
Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?

Exercice 6. Application de la formule de Bayes.

On prend un dé au hasard parmi un lot de 100 dés dont on sait que 25 sont pipés. Pour un dé pipé, la probabilité d'obtenir un 6 est $1/2$.

1. On lance le dé, on obtient 6. Quelle est la probabilité pour que ce dé soit pipé ?
2. On relance le dé, et on obtient un second 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

Exercice 7. Application de la formule de Bayes.

Dans un étang il y a des gardons et des brochets. Paul pêche à la mouche et prend deux fois plus de gardons que de brochets, alors qu'Alex, avec sa canne à lancer, attrape autant de gardons que de brochets. Alex est un pêcheur expérimenté : il pêche trois fois plus de poissons que Paul. Les poissons pêchés sont conservés dans le même vivier. On observe au hasard un des poissons pêchés, c'est un brochet. Calculer la probabilité pour que ce soit Alex qui l'ait pêché.

Exercice 8. Application de la formule de Bayes.

Un jury de concours pose une question dont la réponse est connue par une proportion p d'étudiants. Les étudiants ont le choix entre m réponses dont une seule est la bonne.
L'étudiant Dupont répond correctement. Quelle est la probabilité qu'il ait répondu en connaissant réellement la réponse ?
Faire le calcul pour : $m = 3$, $p = \dfrac{1}{2}$, puis pour $m = 10$, $p = \dfrac{1}{3}$. .

Exercice 9. En Papirémie sévit une maladie mystérieuse appelée toxoprobamathose. Après étude, on obtient les résultats suivants : la probabilité pour un Papirémien d'être atteint de la maladie est de 0,001. Parmi les individus atteints et non traités, la toxoprobamathose est mortelle avec une probabilité de 0,5. Parmi les individus atteints, dépistés et traités, la toxoprobamathose est mortelle avec une probabilité de 0,1. Le seul test de dépistage disponible permet de détecter 80% des personnes atteintes de cette maladie, mais désigne à tort comme malades 2% des personnes non atteintes. De plus le traitement est mortel pour 1% des personnes traitées à tort. Les autorités du pays ont alors le choix suivant :

choix n° 1 : On ne procède à aucun dépistage, ni à aucun traitement.
choix n° 2 : On décide un dépistage systématique et un traitement des personnes ainsi désignées comme malades.

Pour chacun des ces choix, un Papirémien est choisi au hasard dans la population. Modéliser la situation en termes de probabilités dans chacun des cas, et déterminer la probabilité pour que ce Papirémien meurt de la maladie ou du traitement le cas échéant.

Exercice 10. Indépendance d'évènements aléatoires.

Une urne U contient 1 boule blanche et 4 boules noires, et une urne V contient 4 boules blanches et 1 boule noire. On choisit une urne. On effectue deux tirages avec remise dans l'urne choisie. On note A l'événement "La première boule est blanche". B l'événement "La deuxième boule est noire".

1. Déterminer $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. Les événements A et B sont-ils indépendants pour la probabilité conditionnée par l'évènement C : "Le tirage se fait dans l'urne U" ?
3. Le résultat suivant est-il vrai ?
   Soient A, B et C trois événements tels que $\mathbb{P}(C) \neq 0$. Si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, alors $\mathbb{P}_C(A \cap B) = \mathbb{P}_C(A)\mathbb{P}_C(B)$.