Fiche n^o 4

Dénombrement

Exercice 1. Un enfant dispose de 7 crayons de couleurs différentes et doit colorier un dessin composé de 5 zones numérotées de 1 à 5.

1. Combien y a t-il de manières de colorier le dessin ?
2. Combien y a t-il de manières de colorier le dessin de sorte que chaque zone ait une couleur différente des autres ?

Exercice 2. Une urne contient 20 boules numérotées de 1 à 20.

1. On tire, successivement, et sans remise, 8 boules de cette urne.
   (a) Combien y a t-il de tirages ?
   (b) Combien y a t-il de tirages commençant par la boule numéro 1 ?
   (c) Combien y a t-il de tirages se terminant par la boule 20 ?
   (d) Combien y a t-il de tirages commençant par la boule 1 et se terminant par la boule 20 ?
   (e) Combien y a t-il de tirages commençant par $20, 19, 18, 17$?
   (f) Combien y a t-il de tirages ne comportant que des boules paires ?
   (g) Combien y a t-il de tirages comportant la boule numéro 1 ?
   (h) Combien y a t-il de tirages ne comportant pas la boule numéro 1 ?
2. Mêmes questions pour un tirage avec remise.

Exercice 3. On prélève 5 cartes d'un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a t-il de mains différentes ?
2. Combien y a t-il de mains contenant le roi de coeur ?
3. Combien y a t-il de mains contenant le roi de coeur et la dame de coeur ?
4. Combien y a t-il de mains contenant exactement un roi ?
5. Combien y a t-il de mains ne contenant aucun roi ?
6. Combien y a t-il de mains contenant au moins un roi ?
7. Combien y a t-il de mains ne contenant que des coeurs ?
8. Combien y a t-il de mains contenant exactement 2 coeurs ?
9. Combien y a t-il de mains contenant au moins 2 coeurs ?
10. Combien y a t-il de mains ne contenant aucun coeur ?

Exercice 4. Pour sortir, Monsieur Dupont choisit une paire de chaussures (noires ou marron), un pantalon (bleu, beige, ou rouge), une veste (en velour ou en toile) et un chapeau (de feutre ou en cuir).

1. Combien de tenues différentes monsieur Dupont peut-il choisir ?
2. Quand Monsieur Dupont sort avec Madame Dupont, il est exclu qu'il porte les chaussures marron avec le pantalon rouge. Combien de tenues différentes Monsieur peut-il alors porter ?

Exercice 5.

1. On considère n paires de chaussettes que l'on veut ranger dans r tiroirs numérotés de 1 à r.
Quel est le nombre de répartitions possibles, sachant qu'on ne dissocie pas les deux chaussettes d'une paire, et que chaque tiroir a la capacité de contenir toutes les chaussettes ?
2. Dans cette question, $n = 8$ et $r = 4$.
   (a) Quel est le nombre de répartitions pour lesquelles le tiroir 1 est vide ?
   (b) Quel est le nombre de répartitions pour lesquelles les tiroirs 1 et 2 sont vides ?
   (c) Quel est le nombre de répartitions pour lesquelles les tiroirs 1, 2 et 3 sont vides ?
   (d) Quel est le nombre de répartitions pour lesquelles aucun tiroir n'est vide ? On pourra utiliser la formule du crible de Poincaré, en posant A_i l'ensemble des répartitions pour lesquelles le tiroir i est vide (quel est alors le cardinal à calculer ?).

Exercice 6.

1. Combien y a t-il de façons de placer huit personnes côte à côte sur une rangée de huit chaises ?
2. Combien y a t-il de façons de placer huit personnes autour d'une table ronde en ne s'occupant que de leur position relative ?
3. Combien y a t-il de façons de placer quatre hommes et quatre femmes autour d'une table ronde en respectant l'alternance 1 homme-1 femme, et en ne s'occupant que de leur position relative ?

Exercice 7. Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Combien y a t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, m]\!]$?

Exercice 8. Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Combien existe t-il de couples (A, B) de parties de E tels que $A \subset B$?

Exercice 9. Un ensemble contient 9 consonnes et 6 voyelles toutes deux à deux distinctes.
Combien peut-on former de mots de 7 lettres deux à deux distinctes prises dans cet ensemble, comportant 4 consonnes et 3 voyelles ?

Exercice 10. Soit E un ensemble de cardinal $n + 1$, (avec $n \in \mathbb{N}$) et soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq p \leq n$. Soit x_0 un élément de E. En remarquant que l'ensemble des parties à p éléments de E est la réunion disjointe de l'ensemble des parties à p éléments de E contenant x_0 et de l'ensemble des parties à p éléments de E ne contenant pas x_0, retrouver la relation de Pascal : $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre de solutions $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ de l'équation : $x + y + z = n$.
Réponse : $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Exercice 12. Soit n et p deux entiers non nuls. Soient a_1, ..., a_p des entiers tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_i = n$.
Calculer le nombre d'applications de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$ telles que tout i de $[\![1, p]\!]$ ait exactement a_i antécédents.

Réponse : $$\binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2}\cdots\binom{n-(a_1+\cdots+a_p)}{a_p} = \frac{n!}{a_1!a_2!\cdots a_p!}.$$

Exercice 13. Une autre preuve de l'égalité $\operatorname{Card} \mathscr{P}(E) = 2^{\operatorname{Card} E}$.

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $\mathscr{P}_k(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal k.

1. Quel est le cardinal de $\mathscr{P}_k(E)$?
2. Montrer que $\mathscr{P}(E)$ est la réunion disjointe des $\mathscr{P}_k(E)$.
3. En utilisant la formule du binôme de Newton, conclure quant au cardinal de $\mathscr{P}(E)$.

Exercice 14. Écrire la formule du crible pour 4 ensembles.