Fiche n° 3

Applications

Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? Justifiez. Précisez l'application réciproque en cas de bijectivité.

$$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{x} \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x^2 \end{array}$$

$$g_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\setminus\{3\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{2\} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x+3}{x-3} \end{array} \qquad g_2 : \begin{array}{rcl}]-\infty,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1-x) \end{array} \qquad g_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \overline{z} \end{array}$$

$$h_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & [-1,+\infty[\\ x & \mapsto & 5x^2-1 \end{array} \qquad h_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z+\overline{z} \end{array} \qquad h_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & 5z-2 \end{array}$$

$$k_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array} \qquad k_2 : \begin{array}{rcl} [\![1,n]\!] & \to & [\![1,n]\!] \\ k & \mapsto & n+1-k \end{array} \qquad k_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & 2\mathbb{N} \text{ (entiers pairs)} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}$$

Exercice 2. Soit :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x, xy-xy^2). \end{array}$$

f est-elle surjective ? injective ?

Exercice 3.

1. Soit E un ensemble et soit f une application de E dans E vérifiant $f\circ f = Id_E$ (on dit alors que f est une *involution*). Montrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.
2. Soit E un ensemble et soit :

$$g : \begin{array}{rcl} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \\ A & \mapsto & \overline{A}. \end{array}$$

   Montrer que g est bijective et déterminer g^{-1}.

Exercice 4. On pose $\mathbb{U} = \{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$. Soit :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{U} \\ x & \mapsto & \dfrac{1+xi}{1-xi}. \end{array}$$

1. Justifiez que cette application est bien définie (c'est à dire que $\dfrac{1+xi}{1-xi}$ existe pour tout $x\in\mathbb{R}$ **et** que $\dfrac{1+xi}{1-xi}$ appartient à l'ensemble d'arrivée de f).
2. Cette application est-elle injective ? surjective ?

Exercice 5.

1. Soient E, F, G trois ensembles et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.
   (a) Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
   (b) Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
2. En déduire que si $f : E \to F$ est une application telle qu'il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, alors f est bijective.
3. Montrer qu'alors, l'application réciproque de f est g.

Exercice 6. Soient E et F deux ensembles, et soit f une application de E dans F.

1. Soient A et B des parties de E. Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. A t-on $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$?
2. Soient C et D des parties de F. Montrer que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ et que $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
3. Soit $A \subset E$. Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$. Montrer que l'inclusion réciproque n'est pas vraie en général, mais qu'elle est vraie si f est injective.
4. Soit $D \subset F$. Montrer que $f(f^{-1}(D)) \subset D$. Montrer que l'inclusion réciproque n'est pas vraie en général, mais qu'elle est vraie si f est surjective.

Exercice 7. Soit E un ensemble et soient A et B deux parties non-vides de E. Soit l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E)^2 \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B). \end{array}$$

Montrer que f est injective si, et seulement si, $A \cup B = E$.