Fiche n° 2.3

ENSEMBLES

Exercice 1. Soit $E = \{x, y\}$ un ensemble, où x et y sont deux objets quelconques distincts.
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $x \in E$
2. $\{x\} \in E$
3. $\{x\} \subset E$
4. $\emptyset \in E$
5. $x \in \mathcal{P}(E)$
6. $\{x\} \in \mathcal{P}(E)$
7. $\{x\} \subset \mathcal{P}(E)$
8. $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$
9. $\emptyset \subset \mathcal{P}(E)$
10. $\emptyset \subset E$
11. $\{\emptyset\} \subset E$
12. $\{\emptyset\} \subset \mathcal{P}(E)$

Exercice 2. Soit x un objet quelconque.
Décrire en extension les ensembles $\mathcal{P}\big(\{x\}\big)$ et $\mathcal{P}\Big(\mathcal{P}\big(\{x\}\big)\Big)$.

Exercice 3. Montrer les égalités ou inclusions d'ensembles suivantes :

1. $\{n \in \mathbb{Z} \mid (-1)^n = 1\} = 2\mathbb{Z}$, où $2\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs pairs.
2. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 4x - 2\} \subset \mathbb{R}_+$.
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\} = \{(0; 0)\}$.
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in \mathbb{R}_+^*,\ x = \ln t \text{ et } y = t - 1\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant y\}$
5. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = |z + 1|\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = 0\}$.

Exercice 4. Soient A, B, C, D quatre parties d'un même ensemble E. Montrer que :

1. $\big(A^c\big)^c = A$.
2. $A \cap B^c = A \cap C^c \iff A \cap B = A \cap C$.
3. $\Big(A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C\Big) \iff B = C$.

Exercice 5. Retour sur le raisonnement par l'absurde : irrationalité du nombre d'or.

1. Résoudre l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

On note φ la plus grande solution. Supposons que φ soit rationnel.

2. Montrer qu'il existe deux entiers p et q sans facteur commun tels que $p^2 - q^2 = pq$.
3. En déduire une contradiction. Conclusion ?
   Indication : On pourra essayer de « calquer » la démonstration de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$.