Fiche n° 2

Élements de logique

Exercice 1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y = x^2,$
$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y = x^2,$
$\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y = x^2,$
$\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y = x^2,$
$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ y = x^2,$
$\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y = x^2.$

Exercice 2. Écrire, à l'aide de quantificateurs, les propositions suivantes et leur négation.

1. Il existe un entier multiple de tous les autres.
2. Tout entier peut s'écrire comme produit de deux entiers.
3. Tout réel possède une racine carrée dans $\mathbb{R}$.
4. Étant donnés trois réels, il y en a au moins deux de même signe.

Exercice 3. Écrire la négation des énoncés suivants (f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) :
Rappel : la négation de ($A \Rightarrow B$) est (A et non B)).

1. $0 < x \leq y,$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall x' \in \mathbb{R},\ (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')),$
3. $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = y,$

Exercice 4. Soit E un ensemble. Montrer que pour toutes parties A, B, C de E :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ et } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Exercice 5. Soit E un ensemble. Montrer que pour toutes parties A et B de E :

$$A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$$

Exercice 6. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $2^n > n$.

Exercice 7. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_1 = 5, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n. \end{cases}$$

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 3^n$.

Exercice 8. Rappel : Un nombre premier est un nombre entier supérieur ou égal à deux qui n'admet pour diviseurs que 1 et lui-même. Une propriété connue est que tout nombre entier supérieur ou égal à deux admet au moins un diviseur premier.
Montrer par récurrence que tout entier naturel supérieur ou égal à deux est un nombre premier ou s'écrit comme produit de nombres premiers.