NOM :

Prénom :

Lycée Pierre de Fermat
Année 2010-2011
BCPST 1.2

Interrogation n° 1 : Suites réelles

Mardi 7 décembre (durée : 30 mn)

Pour chacune des questions ci-dessous, une ou plusieurs réponses proposées sont exactes. Vous devez cocher la réponse exacte sans justification. Une bonne réponse rapporte **1 point**. *Une mauvaise réponse enlève* **0,5 point**. *L'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

Question 1 : Si (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite finie, alors il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \big(n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n = v_n\big)$$

☐ Vrai

☑ Faux

Question 2 : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \big(n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \leqslant 1/n\big)$$

☐ Vrai

☑ Faux

Question 3 : Si $(u_n + v_n)$ converge, alors (u_n) et (v_n) convergent.

☐ Vrai

☑ Faux

Question 4 : Si $(u_n v_n)$ converge vers 0, alors (u_n) ou (v_n) converge vers 0.

☐ Vrai

☑ Faux

Question 5 : Si (u_n) n'est pas minorée, alors elle est majorée.

☐ Vrai

☑ Faux

Question 6 : Si (u_n) prend un nombre fini de valeurs, alors elle est convergente.

☐ Vrai

☑ Faux

Question 7 : Si (u_n) est convergente, alors elle prend un nombre fini de valeurs.

☐ Vrai

☑ Faux

Question 8 : Si (u_n) est positive et strictement croissante, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

☐ Vrai

☑ Faux

Question 9 : Toute suite arithmétique de raison $-1/2$ converge.

☐ Vrai

☑ Faux

On suppose désormais que (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison q.

Question 10 : S'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 2000$, alors $q > 1$.

☐ Vrai

☑ Faux

Question 11 : Si $q < 1$, alors il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < u_n < 1/2$.

☐ Vrai

☑ Faux

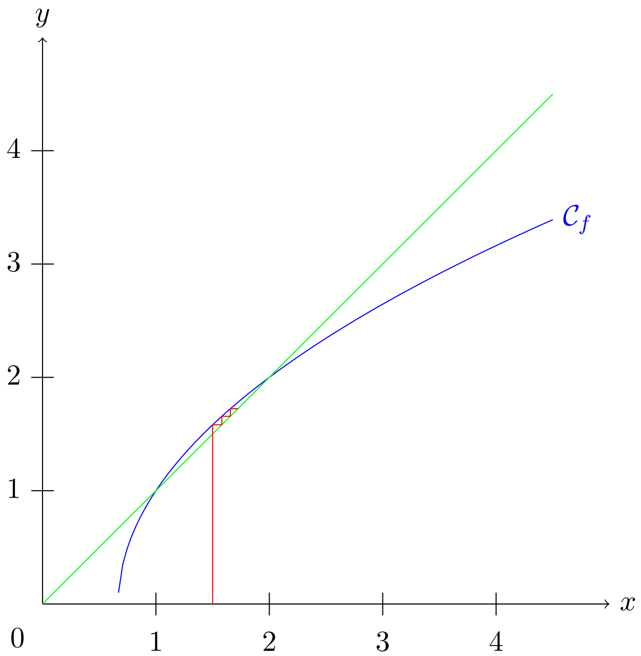
Question 12 : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right) = 2$, alors $q = 1/2$.

☑ Vrai

☐ Faux

On suppose désormais que (v_n) est une suite de premier terme $v_0 \in]1,2]$ vérifiant la relation de récurrence $v_{n+1} = f(v_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall x \geqslant 0,\ f(x) = \sqrt{3x-2}$.

Question 13 : Illustrer (en couleurs) les premiers termes à l'aide du graphe suivant :



Question 14 : La suite (v_n) :

- ☑ est monotone
- ☐ n'est jamais stationnaire
- ☑ est minorée par 1
- ☑ est majorée par 2
- ☑ est bornée
- ☐ converge vers 1
- ☑ converge vers 2
- ☐ diverge

Question 15 : Montrer, **en revenant à la définition** avec les ε, A, n_0, *etc*, que la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ converge vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $n_0 = E\left(\left(\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right)^{1/3}\right) + 1$.

Alors $n_0 \in \mathbb{N}^*$, et si $n \geqslant n_0$, alors $n\sqrt{n} \geqslant n_0\sqrt{n_0}$ (croissance de la racine carrée). Or $n_0 \geqslant \left(\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right)^{1/3}$, donc $n_0^3 \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon^2}$, d'où $n_0\sqrt{n_0} \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$. On en déduit que $u_n \leqslant \varepsilon$, ce qui montre la convergence annoncée.