— Étude d'une fonction —

On considère une **fonction d'une variable réelle** f. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1 Ensemble de définition

L'ensemble de définition de la fonction f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}$, noté $\mathscr{D}_f$, des réels x tels que $f(x)$ est bien défini.

Exemple.

- L'ensemble de définition de $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+^*$.
- L'ensemble de définition de $g : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ est $\mathscr{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

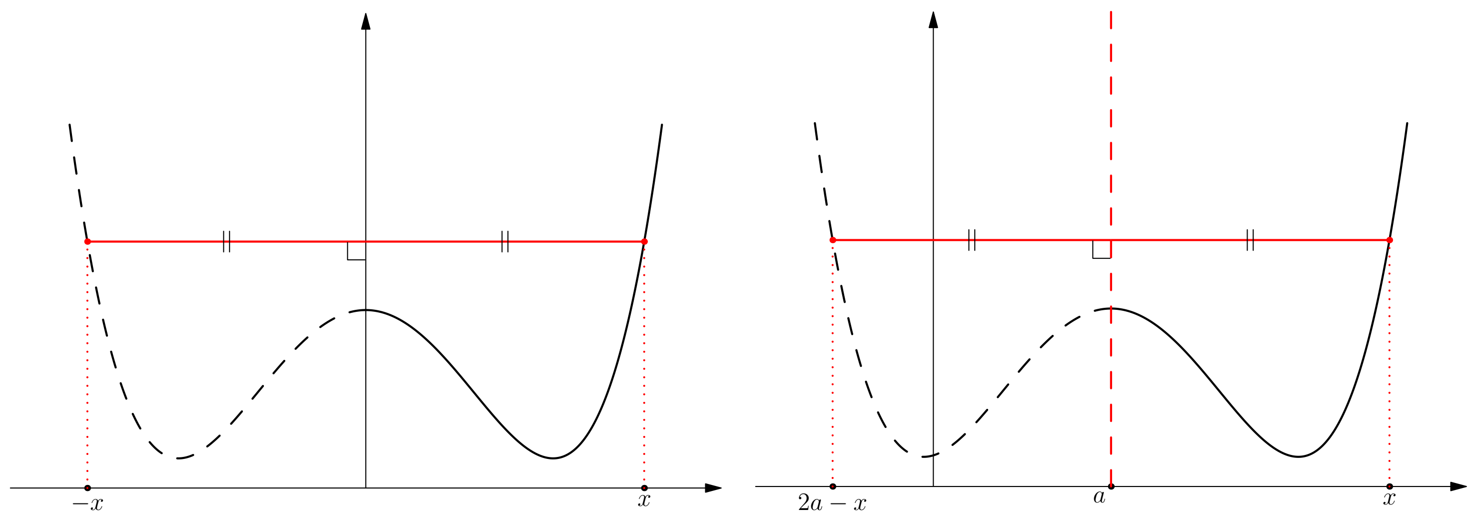
2 Parité

2.1 Fonction paire

La fonction f est paire (*cf.* figure 1(a)) si on a

- $\forall x \in \mathbb{R},\ x \in \mathscr{D}_f \implies -x \in \mathscr{D}_f$;
- $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f(x) = f(-x)$.

On peut alors restreindre l'étude la fonction paire f à $\mathbb{R}_+ \cap \mathscr{D}_f$. La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est alors obtenue par symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées de la courbe de la restriction de f à $\mathbb{R}_+ \cap \mathscr{D}_f$.



(a) Fonction paire (b) Axe de symétrie

FIGURE 1 – Les courbes qui admettent un axe de symétrie

Exemple.

- La fonction $f : x \mapsto 5x^4 - 2x^2 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$ est paire.
- La fonction $g : x \mapsto \cos(2x)$ définie sur $\mathbb{R}$ est paire.
- La fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ est paire.

Axe de symétrie

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet la droite verticale d'équation $x = a$ pour axe de symétrie (*cf.* figure 1(b)) si on a

- $\forall x \in \mathbb{R},\ x \in \mathscr{D}_f \implies 2a - x \in \mathscr{D}_f$;
- $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f(x) = f(2a - x)$.

On peut alors restreindre l'étude la fonction f à $[a, +\infty[\cap \mathscr{D}_f$.

Exemple.

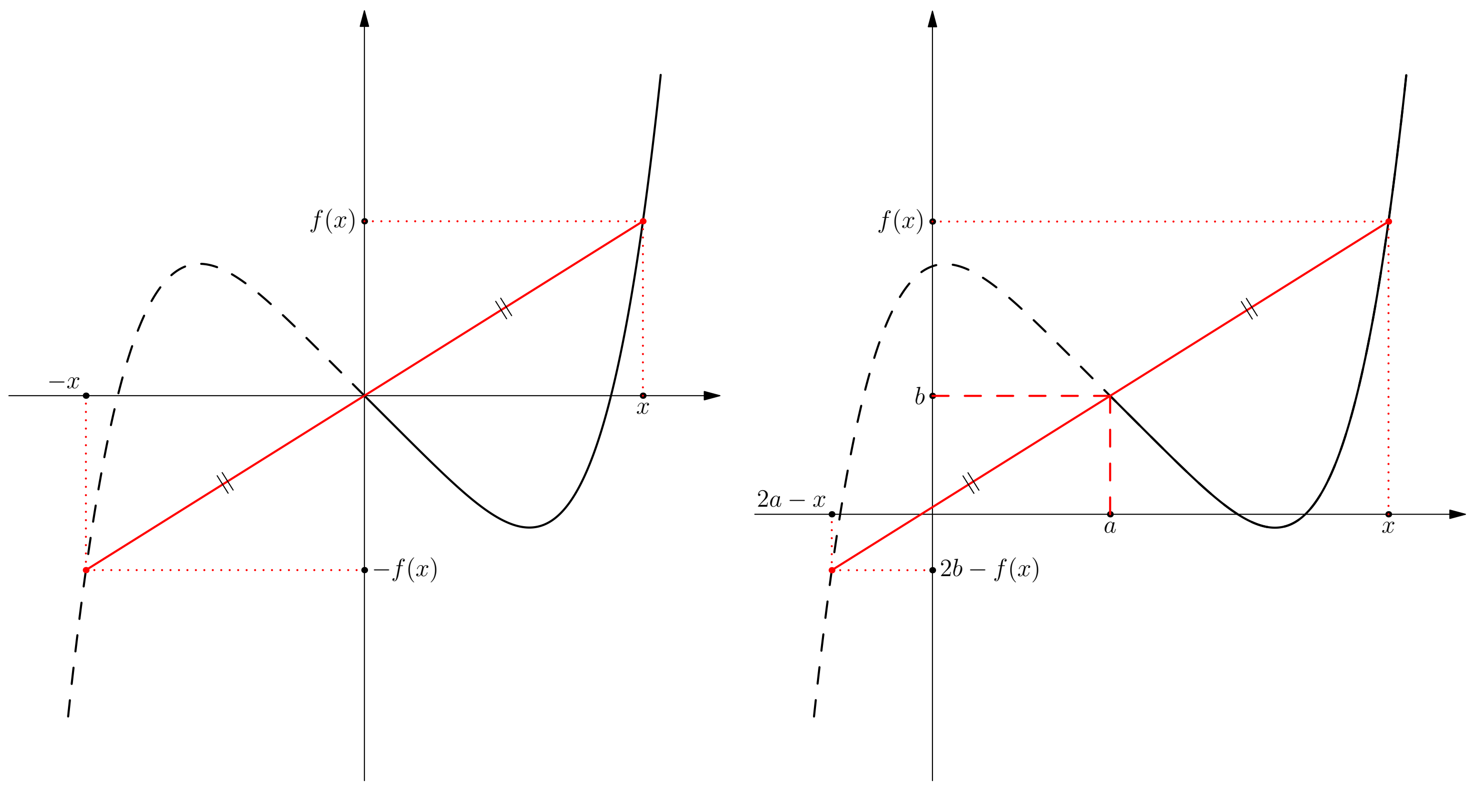
- La fonction *sinus* admet la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ comme axe de symétrie.

2.2 Fonction impaire

La fonction f est impaire (*cf.* figure 2(a))si on a

- $\forall x \in \mathbb{R},\ x \in \mathscr{D}_f \implies -x \in \mathscr{D}_f$;
- $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f(x) = -f(-x)$.

On peut alors restreindre l'étude la fonction impaire f à $\mathbb{R}_+ \cap \mathscr{D}_f$. La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est alors obtenue par symétrie centrale de centre O de la courbe de la restriction de f à $\mathbb{R}_+ \cap \mathscr{D}_f$.



(a) Fonction impaire (b) Centre de symétrie

FIGURE 2 – Les courbes qui admettent un centre de symétrie

Exemple.

- La fonction $f : x \mapsto 2x^7 - x$ définie sur $\mathbb{R}$ est impaire.
- La fonction $g : x \mapsto \sin(5x)$ définie sur $\mathbb{R}$ est impaire.
- La fonction $h : x \mapsto \tan x$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ est impaire.

Centre de symétrie

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet le point Ω de coordonnées (a, b) pour centre de symétrie (*cf.* figure 2(b)) si on a

- $\forall x \in \mathbb{R},\ x \in \mathscr{D}_f \implies 2a - x \in \mathscr{D}_f$;
- $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f(2a - x) = 2b - f(x)$.

On peut alors restreindre l'étude la fonction f à $[a, +\infty[\cap\mathscr{D}_f$.

EXEMPLE.

- La fonction *cosinus* admet le point Ω de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ pour centre de symétrie.

3 Périodicité

La fonction f est périodique de période T (ou T-périodique) (*cf.* figure 3) si on a

- $\forall x \in \mathbb{R},\ x \in \mathscr{D}_f \iff x + T \in \mathscr{D}_f$;
- $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f(x + T) = f(x)$.

On peut alors restreindre l'étude la fonction impaire f à $[0, T] \cap \mathscr{D}_f$. La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est alors obtenue par translations de vecteur $kT\vec{\imath}$, avec $k \in \mathbb{Z}$, de la courbe de la restriction de f à $[0, T] \cap \mathscr{D}_f$.

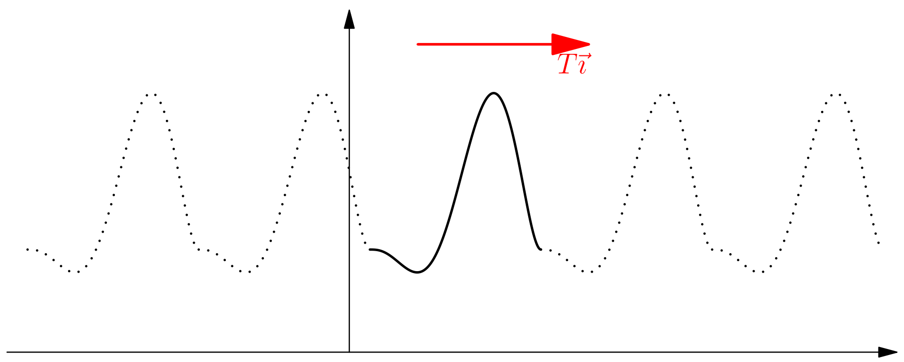


FIGURE 3 – Une fonction périodique

EXEMPLE.

- La fonction $f : x \mapsto \cos(2\pi x)$ définie sur $\mathbb{R}$ est 1-périodique.
- La fonction $g : x \mapsto \tan x$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ est périodique de période π.

4 Monotonie

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
La fonction f est croissante sur $\mathscr{D}_f \cap I$ si

$$\forall (x, y) \in \left(\mathscr{D}_f \cap I\right)^2,\ x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y).$$

La fonction f est décroissante sur $\mathscr{D}_f \cap I$ si

$$\forall (x, y) \in \left(\mathscr{D}_f \cap I\right)^2,\ x \leqslant y \implies f(x) \geqslant f(y).$$

Pour la définition de la stricte croissance et de la stricte décroissance, on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes.

On dit que f est (strictement) monotone si f est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante sur $\mathscr{D}_f$.

- La fonction logarithme est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La valeur absolue est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Avec la dérivée

On considère ici que la fonction f est définie sur **un intervalle I**.

- f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.
- f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0$.

Attention : si on ne travaille plus sur un intervalle, ça devient faux. Par exemple pour la fonction inverse, la dérivée est toujours négative mais elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

5 Extremum

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathscr{D}_f \cap I$.
La fonction f admet un maximum sur $\mathscr{D}_f \cap I$ en x_0 si

$$\forall x \in \mathscr{D}_f \cap I,\ f(x) \leqslant f(x_0).$$

La fonction f admet un minimum sur $\mathscr{D}_f \cap I$ en x_0 si

$$\forall x \in \mathscr{D}_f \cap I,\ f(x) \geqslant f(x_0).$$

La fonction f admet un extremum sur $\mathscr{D}_f \cap I$ en x_0 si f admet un maximum en x_0 ou si f admet un minimum en x_0.

- La fonction $x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ admet un minimum en 0. En effet, $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$.
- La fonction cosinus admet un maximum en 0. En effet, $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x \leqslant 1$.

Avec la dérivée

On considère ici que la fonction f est définie sur **un intervalle I**.

Si f admet un extremum sur I en $x_0 \in I$ et **si** x_0 **n'est pas une extrémité de** I, alors $f(x_0)$. La tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_0 est alors horizontale (*cf.* figure 4).

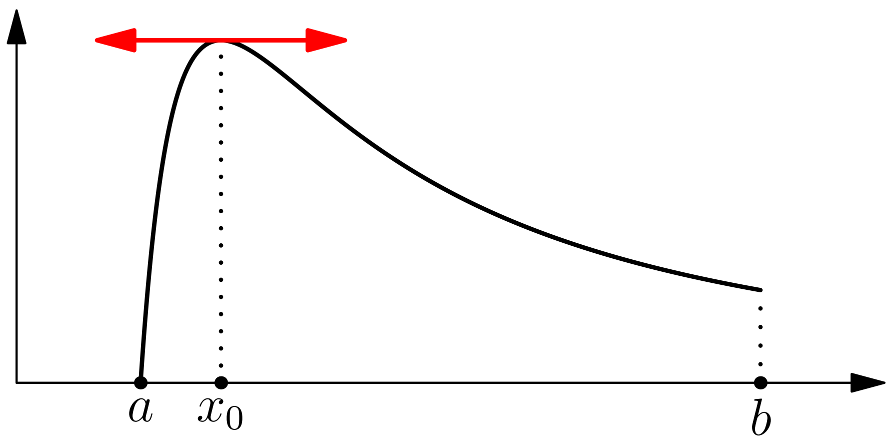


FIGURE 4 – Le maximum d'une fonction dérivable (x_0 n'est pas une extrémité de l'intervalle de définition)

Attention :

- La réciproque est fausse. Par exemple, pour la fonction cube, la dérivée est nulle en 0 sans qu'elle admette un extremum en ce point.
- Si x_0 est une extrémité de l'intervalle I, alors la dérivée n'est pas forcément nulle. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^2$ définie sur $[0, 1]$ admet un maximum en 1 et sa dérivée en ce point vaut 2.