Chapitre 5

ESPACES PROBABLISÉS FINIS

1 Expérience aléatoire

1.1 Définition

On désigne par *expérience aléatoire* toute expérience dont le résultat est soumis au hasard. Toutes les issues possibles sont connues *a priori* mais l'expérience peut conduire à des résultats différents quand on la répète de la même manière.
L'une des expériences aléatoires les plus simples est de lancer une pièce de monnaie en l'air et d'observer sa face visible lorsqu'elle retombe. Cette expérience n'a que deux issues : *pile* ou *face*. Généralement, nous tirons à pile ou face pour départager deux adversaires car nous sommes convaincus d'avoir autant de chances de gagner que de perdre. Mais que signifie cette phrase ? Lui donner un sens est justement l'objectif de la théorie des probabilités.
Parmi les expériences aléatoires « classiques », citons les jeux de hasard (loto, roulette du casino, le poker...) ou bien encore des situations de la vie courante (le temps exact d'attente d'un métro n'est pas prévisible...). Dans l'esprit du joueur ou de l'usager des transports urbains naissent alors des questions du type : quelles sont mes chances de gagner avec ces cartes ? Vais-je attendre le métro moins de 5 minutes ? La théorie des probabilités permet de répondre à ces questions en quantifiant ces chances de succès par un nombre réel compris entre 0 et 1.

1.2 Univers

La première étape dans l'étude d'une expérience aléatoire en mathématiques consiste à préciser l'ensemble des résultats possibles.

Définition 1. *On appelle* univers *associé à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ l'ensemble des tous les résultats possibles (appelés aussi* éventualités*) de $\mathcal{E}$. Traditionnellement, l'univers est noté Ω.*

Cette année, on se limitera aux expériences comportant un nombre finis d'éventualités et, dans la suite, Ω désignera un ensemble fini non vide.

Exemple 2.

Expérience 1 *On effectue un lancer de pile ou face :* $\Omega = \{P, F\}$.

Expérience 2 *On lance un dé à 6 faces :* $\Omega = [\![1, 6]\!]$.

Expérience 3 *On lance un dé et on regarde la parité :* $\Omega = \{P, F\}$

Expérience 4 *On lance deux dés et on regarde la somme :* $\Omega = [\![2, 12]\!]$

Expérience 5 *On lance trois fois un dé successivement et on note les résultats obtenus :* $\Omega = [\![1, 6]\!]^3$.

Expérience 6 *On choisit au hasard 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.*
Ω est l'ensemble des parties à 5 éléments de l'ensemble des 32 cartes.

1.3 Événements

Lorsque l'on effectue une expérience aléatoire, certains faits liés à l'expérience peuvent se produire ou non : on les appelle *événements.*

Définition 3. *On appelle* événement *associé à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ d'univers Ω toute partie de Ω.*

Exemple 4.

Expérience 2 *On lance un dé à 6 faces.*

- *« le résultat du lancer est pair » est l'événement* $A = \{2, 4, 6\}$.
- *« le résultat du lancer est 6 » est l'événement* $B = \{6\}$.
- *« le résultat du lancer est divisible par 3 » est l'évènement* $C = \{3, 6\}$.
- *« le résultat du lancer est impair » est l'événement* $D = \{1, 3, 5\}$.

Définition 5. *Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire d'univers Ω.*

- *L'ensemble vide $\varnothing$ est appelé* événement impossible.
- *L'univers Ω est appelé* événement certain.
- *Les singletons $\{\omega\}$, $\omega \in \Omega$, sont appelés* événements élémentaires.

L'ensemble des événements associés à une expérience d'univers Ω est donc $\mathscr{P}(\Omega)$.
On pourra ainsi utiliser le langage de la théorie des ensembles à bon escient.

Remarque 6. *On confond souvent l'événement en tant que partie de Ω et sa* phrase descriptive *(traduction en français), que l'on notera entre guillemets. On utilisera alors plutôt le langage de la logique :*

Phrase descriptive	*Partie de Ω correspondante*
« le contraire de A s'est réalisé »	$\overline{A}$
« A ou B se sont réalisés »	$A \cup B$
« A et B se sont réalisés »	$A \cap B$
« B s'est réalisé, mais pas A »	$B \setminus A$
« un seul des événements A et B s'est réalisé » *ou « A ou B s'est réalisé, mais pas les deux en même temps »*	$A \Delta B$

On notera toutefois le vocabulaire spécifique aux probabilités suivant :

Définition 7. *Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire d'univers Ω, et $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ deux événements associés.*

- *Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont* incompatibles.
- *Si $A \subset B$, on dit que l'événement A* implique *l'événement B.*

Exemple 8.

Expérience 2 *On lance un dé à 6 faces. Avec les mêmes notations que dans l'exemple* **??** *:*

- *B implique C.*
- *B et D sont incompatibles.*

Définition 9. *Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire d'univers Ω.*
On appelle système complet d'événements de Ω *toute famille d'événements $(A_1, \ldots, A_m)$ ($m \in \mathbb{N}^*$) vérifiant :*

- *les événements sont deux à deux incompatibles : $\forall i, j \in [\![1, m]\!], \ (i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing)$*
- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \Omega.$

On note alors $\displaystyle\Omega = \bigsqcup_{i=1}^{m} A_i.$

Exemple 10.

Expérience 2 *On lance un dé à 6 faces. Alors $\Omega = [\![1, 6]\!] = A \sqcup D = \{2, 4, 6\} \sqcup \{1, 3, 5\}$.*

Expérience 4 *On lance deux dés à 6 faces. Alors $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$.*
Les événements $A =$ « Obtenir deux chiffres pairs », $B =$ « Obtenir un chiffre pair et un chiffre impair » et $C =$ « Obtenir deux chiffres impairs » forment un système complet d'événements.

2 Espaces probabilisés finis

2.1 Espace probabilisable

Définition 11. *Soit Ω un ensemble fini et $\mathscr{P}(\Omega)$ l'ensembles des parties de Ω.*
Le couple $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ est appelé espace probabilisable (fini)*.*

Remarque 12. *$\mathscr{P}(\Omega)$ vérifie plusieurs propriétés fondamentales, qui garantissent l'usage des notions ensemblistes usuelles :*

- $\Omega \in \mathscr{P}(\Omega)$
- $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \overline{A} \in \mathscr{P}(\Omega)$
- *Si $k \geqslant 1$ est un entier et $A_1, \dots, A_k \in \mathscr{P}(\Omega)$, alors $\bigcup_{i=1}^{k} A_k \in \mathscr{P}(\Omega)$.*

2.2 Probabilité

Définition 13. *Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini.*
On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ *ou simplement* probabilité sur Ω, *toute application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ satisfaisant :*

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, i.e. *la probabilité de l'événement certain est égale à 1 ;*
- $\forall (A, B) \in \mathscr{P}(\Omega),\ \Big(A \cap B = \varnothing \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)\Big)$, i.e. *la probabilité de l'union de deux événements incompatibles est égale à la somme des probabilités de ces deux événements.*

Le triplet $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé fini*, et pour toute partie $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A)$ est appelée* probabilité de l'événement A*.*

On a alors :

Corollaire 14. *Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, et $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ deux événements. Alors :*

- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ *;*
- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$, i.e. *la probabilité de l'événement impossible vaut 0 ;*
- *Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.*
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Démonstration. Laissée en exercice. □

La généralisation à la réunion de n événements ($n \geqslant 2$) imite ce qu'on a fait à propos des ensembles finis :

Théorème 15 (Crible de Poincaré)**.**
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Si $n \geqslant 1$ et si A_1, A_2,..., A_n sont des événements, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = & \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \\
& - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbb{P}\left(A_i \cap A_j\right) \\
& + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} \mathbb{P}\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) \\
& \vdots \\
& + (-1)^{n+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right),
\end{aligned}$$

ou avec une autre écriture :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)\right).$$

Remarque 16. *Si les événements A_1, A_2,..., A_n sont deux à deux incompatibles, on a*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

Exercice 17.

- *Formule du crible pour $n = 3$:* $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.
- *Formule du crible pour $n = 4$:*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D) \\ -\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap D) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(B \cap D) - \mathbb{P}(C \cap D) \\ +\mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap D) + \mathbb{P}(A \cap C \cap D) + \mathbb{P}(B \cap C \cap D) \\ -\mathbb{P}(A \cap B \cap C \cap D).\end{aligned}$$

Exercice 18. *On dispose de trois boîtes numérotées de 1 à 3 et de cinq jetons numérotés de 1 à 5. On range au hasard les jetons dans les boîtes. Quelle est la probabilité qu'aucune boîte ne soit vide ?*

2.3 Probabilité et événements élémentaires

Si $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ est un événement, on peut toujours exprimer $\mathbb{P}(A)$ en fonction des probabilités des événements élémentaires.

Exemple 19.

Expérience 2 *On lance un dé à 6 faces. On a $\Omega = [\![1, 6]\!]$.*
Alors $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\})$.

Plus généralement :

Proposition 20. *Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est fini, et si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω, alors :*

- $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(\{\omega_i\}) \geqslant 0.$
- $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) = \displaystyle\sum_{k \ \mid \ \omega_k \in A} \mathbb{P}(\{\omega_k\}).$
- *En particulier :* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = 1.$

Réciproquement :

Proposition 21. *Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est fini, et si $p_1, \dots, p_n$ sont des réels positifs tels que $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, alors il existe une et une seule probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que $\mathbb{P}(\{\omega_k\}) = p_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.*

2.4 Équiprobabilité

Exemple 22. *Considérons l'expérience aléatoire qui consiste en un pile ou face. L'univers associé est alors $\Omega = \{P, F\}$. Et la probabilité associée est définie par $\mathbb{P}(P) = p$ et $\mathbb{P}(F) = 1 - p$, où $0 \leqslant p \leqslant 1$ (l'existence et l'unicité d'une telle probabilité est assurée par le paragraphe précédent). De manière intuitive :*

- *si la pièce est équilibrée, alors $p = 1 - p = 1/2$.*
- *si la pièce est truquée, alors $p \neq 1/2$. Par exemple, si la pièce a deux faces pile, alors $p = 1$ et $1 - q = 0$: il n'y a aucune chance de faire face !*

Une hypothèse classique en théorie des probabilités consiste donc à supposer que tous les résultats d'une expérience aléatoire sont *équiprobables*, c'est à dire qu'ils ont la même probabilité de réalisation. Sous cette hypothèse, le calcul de la probabilité d'un événement se ramène à un problème de dénombrement : il suffit en effet de calculer le nombre d'issues de l'expérience réalisant cet événement.

Définition 23. *Soit $(\Omega, \mathbb{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini. On appelle* probabilité uniforme *l'application $\mathbb{P}_u$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ définie par :*

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega),\ \mathbb{P}_u(A) = \frac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)}.$$

*On dit aussi que l'expérience a lieu en situation d'*équiprobabilité.

Quand le contexte d'équiprobabilité sera clair et sans ambiguïté, on notera simplement $\mathbb{P}$ au lieu de $\mathbb{P}_u$.

Exercice 24. *Montrer qu'il s'agit bien d'une probabilité !*

Quand est-on en situation d'équiprobabilité ?
Soit $\{\omega\}$ un événement élémentaire. La définition de la probabilité uniforme nous donne

$$\mathbb{P}_u\,\{\omega\}) = \frac{\operatorname{card}(\{\omega\})}{\operatorname{card}\Omega} = \frac{1}{\operatorname{card}\Omega}.$$

Cette probabilité sera donc utilisée à chaque fois que l'on sera en présence d'une expérience où les éventualités ont toutes les mêmes chances de se réaliser. Dans un énoncé, cela se traduira souvent (attention aux pièges !) par les expressions « boules indiscernables » pour le tirage dans une urne, « pièce équilibrée » pour un jeu de pile ou face ou encore « dé non pipé » pour un lancer de dé...

Exercice 25.

Expérience 2 *On lance un dé à 6 faces. On a : $\Omega = [\![1, 6]\!]$.*

- *Supposons le dé équilibré.*
  Alors $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = {}^{3}\!/_{6} = {}^{1}\!/_{2}$.
- *Supposons maintenant que le dé soit truqué de façon à ce que chaque face ait une probabilité d'apparition proportionnelle au numéro qu'elle porte.*
  Alors :
  - $\mathbb{P}(\{1\}) = {}^{1}\!/_{21}$ $\quad\mathbb{P}(\{2\}) = {}^{2}\!/_{21}$ $\quad\mathbb{P}(\{3\}) = {}^{1}\!/_{7}$ $\quad\mathbb{P}(\{4\}) = {}^{4}\!/_{21}$ $\quad\mathbb{P}(\{5\}) = {}^{5}\!/_{21}$.

    En effet, si p est le rapport de proportionnalité en question, alors :

    $$\mathbb{P}(\{1\}) = p \quad \mathbb{P}(\{2\}) = 2p \quad \mathbb{P}(\{3\}) = 3p \quad \mathbb{P}(\{4\}) = 4p \quad \mathbb{P}(\{5\}) = 5p \quad \mathbb{P}(\{6\}) = 6p$$

    et on a :

    $$1 = \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(\{k\}) = \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(\{kp\}) = p\sum_{k=1}^{6} k = 21p.$$

    On obtient alors $p = {}^{1}\!/_{21}$, et l'on obtient les probabilités recherchées.
  - $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = {}^{4}\!/_{7}$.