Chapitre n° 7 :
Nombres réels

> « La base de l'analyse moderne est toujours le merveilleux outil forgé par les mathématiciens des trois derniers siècles, le Calcul infinitésimal. [...] Le Calcul infinitésimal [...] est l'apprentissage du maniement des inégalités bien plus que des égalités, et on pourrait le résumer en trois mots :
> MAJORER, MINORER, APPROCHER. »
>
> *Calcul infinitésimal,* Jean Dieudonné

Cette citation de Jean Dieudonné nous montre bien l'importance de bien comprendre les propriétés de la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$, ce qu'on a le droit de faire ou non avec les inégalités et toutes les propriétés associées.

I L'ensemble $\mathbb{R}$

On admet l'existence de l'ensemble des nombres réels, que l'on note $\mathbb{R}$. On rappelle que $\mathbb{R}$ est muni d'une addition et d'une multiplication vérifiant les propriétés classiques (on dit que $\mathbb{R}$ est un corps), entre autres :

- L'addition et la multiplication sont associatives ;

$$\forall (a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ (a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c$$
$$\forall (a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ (a\times b)\times c=a\times(b\times c)=a\times b\times c$$

- L'addition et la multiplication sont commutatives ;

$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ a+b=b+a$$
$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ a\times b=b\times a$$

- 0 est l'élément neutre de l'addition opposé, *i.e.* $\forall a\in\mathbb{R}, a+0=a$, et tout réel admet un opposé ;
- 1 est l'élément neutre de la multiplication, *i.e.* $\forall a\in\mathbb{R}, a.1=a$, et tout réel non nul admet un inverse ;
- La multiplication est distributive par rapport à l'addition ;

$$\forall (a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ a\times(b+c)=a\times b+a\times c$$

- Le corps des réels est intègre :

$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ (a\times b=0 \iff a=0 \text{ ou } b=0)$$

Ce résultat est essentiel dans la résolution des équations : en effet, cela permet de simplifier une égalité par un réel non nul ; lors de la résolution d'une équation, on cherche souvent à travailler sur l'équation pour se ramener à une forme factorisée et ainsi appliquer le résultat précédent. Attention de na pas diviser par 0 !

II Comparaison de réels

A L'ordre dans $\mathbb{R}$

On rappelle que l'ensemble des réels est la réunion de deux sous-ensembles :

- L'ensemble $\mathbb{R}_+$ des réels positifs (ou nuls).
- L'ensemble $\mathbb{R}_-$ des réels négatifs (ou nuls).

Seul le nombre 0 appartient à ces deux parties : $\mathbb{R}^+\cap\mathbb{R}^-=\{0\}$.

Définition : Soient a et b deux réels.
On dit que a est **inférieur ou égal** à b, et on note $a\leqslant b$ si $a-b\in\mathbb{R}_-$.
On dit que a est **supérieur ou égal** à b, et on note $a\geqslant b$ si $a-b\in\mathbb{R}_+$.

Remarque : On définit aussi de manière naturelle les termes « strictement inférieur » et « strictement supérieur ».

Attention : On rappelle qu'une inégalité entre nombres complexes non réels **n'a pas de sens !**

Propriété : La relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes :
- **Reflexivité :** $\forall a\in\mathbb{R},\ a\leqslant a.$
- **Symétrie :** $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$, si $a\leqslant b$ et $b\leqslant a$, alors $a=b$.
- **Transitivité :** $\forall (a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, si $a\leqslant b$ et $b\leqslant c$, alors $a\leqslant c$.

B Majorer, minorer

Majorer un nombre réel inconnu x, c'est trouver un nombre connu b tel que l'on puisse démontrer que l'on a $x\leqslant b$; un tel nombre b est appelé un majorant de x. De même, *minorer* x, c'est trouver un nombre connu c tel que $c\leqslant x$, et c est appelé un minorant de x.
Il revient au même de majorer x, ou de minorer $-x$.

Avec la valeur absolue

Définition : Pour tout réel x, on définit valeur absolue de x par

$$|x|=\begin{cases} x & \text{si } x\geqslant 0\\ -x & \text{si } x<0.\end{cases}$$

On rappelle quelques propriétés de la valeur absolue :

- $\forall x\in\mathbb{R},\ |x|\geqslant 0$;
- $\forall x\in\mathbb{R},\ |x|=0 \iff x=0$;
- $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |x.y|=|x||y|$;
- $\forall x\in\mathbb{R},\ \sqrt{x^2}=|x|$.

Les inégalités triangulaires, déjà vues pour le module des nombres complexes, sont naturellement valides pour la valeur absolue sur $\mathbb{R}$:

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \big||x|-|y|\big|\leqslant|x\pm y|\leqslant|x|+|y|.$$

Propriété : Pour tout réel x et tout réel positif r,

$$|x| \leqslant r \iff -r \leqslant x \leqslant r.$$

Démonstration. Exercice. □

Très souvent, on majorera et minorera x à la fois, en l'enfermant dans un intervalle connu :

$$\begin{aligned} b \leqslant x \leqslant c &\iff b - \frac{b+c}{2} \leqslant x - \frac{b+c}{2} \leqslant c - \frac{b+c}{2} \\ &\iff -\frac{c-b}{2} \leqslant x - \frac{b+c}{2} \leqslant \frac{c-b}{2} \\ &\iff \left| x - \frac{b+c}{2} \right| \leqslant \frac{c-b}{2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, minorer et majorer en même temps un réel x revient à écrire une majoration de la valeur absolue $|x-a|$, où a est le milieu de l'intervalle.

C Règles de calculs

La définition de la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ permet d'écrire

$$\text{si } \begin{cases} c \leqslant x \leqslant b \\ c' \leqslant x' \leqslant b' \end{cases} \quad \text{alors} \quad c + c' \leqslant x + x' \leqslant b + b' \quad \text{et} \quad c - b' \leqslant x - x' \leqslant b - c'.$$

Autrement dit :

- *Pour majorer (resp. minorer) une somme de deux nombres réels, il suffit de majorer (resp. minorer) chacun des termes.*
- *Pour majorer une différence $x - x'$, il suffit de majorer x et de minorer x' ; de même pour pour minorer $x - x'$, il suffit de minorer x et de majorer x'.*

De même,

$$\text{si } \begin{cases} 0 < c \leqslant x \leqslant b \\ 0 < c' \leqslant x' \leqslant b' \end{cases} \quad \text{alors} \quad cc' \leqslant xx' \leqslant bb' \quad \text{et} \quad \frac{c}{b'} \leqslant \frac{x}{x'} \leqslant \frac{b}{c'}.$$

Autrement dit :

- *Pour majorer (minorer) un produit de deux nombres strictement positifs, il suffit de majorer (minorer) chacun des facteurs.*
- *Pour majorer un quotient x/x' de deux nombres strictement positifs, il suffit de majorer le numérateur et de minorer le dénominateur ; pour minorer x/x', il suffit de minorer le numérateur et de majorer le dénominateur.*

Avec la valeur absolue

Supposons que l'on dispose des inégalités $0 < c \leqslant |x| \leqslant b$ et $0 < c' \leqslant |x'| \leqslant b'$.

On en déduit alors (d'après les inégalités triangulaires) que

$$\max(c - b', c' - b) \leqslant |x \pm x'| \leqslant |b| + |b'|.$$

Naturellement, l'inégalité de gauche n'a d'intérêt que si l'un des deux nombres $c - b'$, $c' - b$ est strictement positif.

Pour les produits et quotients, par contre, les règles sont plus simples, en raison de la formule $|x.x'| = |x|.|x'|$. On a :

$$0 < c.c' \leqslant |x.x'| \leqslant b.b' \quad \text{et} \quad 0 < \frac{c}{b'} \leqslant \left|\frac{x}{x'}\right| \leqslant \frac{b}{c'}.$$

III L'ordre et les parties de $\mathbb{R}$

A Majorant, minorant

Définition : Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit que le réel M est un **majorant** de A si tout élément de A est inférieur ou égal à M, *i.e.*

$$\forall a \in A, \ a \leqslant M.$$

- On dit que le réel m est un **minorant** de A si tout élément de A est supérieur ou égal à m, *i.e.*

$$\forall a \in A, \ a \geqslant m.$$

Toute partie de $\mathbb{R}$ n'admet pas forcément un minorant ou un majorant. Par exemple, aucun réel ne majore l'ensemble $\mathbb{R}^+$.

Définition : Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dira que A est **majorée** si elle admet un majorant et que A est **minorée** si elle admet un minorant.
Enfin, si A est à la fois majorée et minorée, la partie A sera dite **bornée**.

B Maximum, minimum

Définition : Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que le réel M est le **maximum** (*resp.* le **minimum**) de l'ensemble A si M est à la fois un élément de A et un majorant (*resp.* un minorant) de A. On le note $\max(A)$ (*resp.* $\min(A)$).

On parle également de **plus grand élément** ou de **plus petit élément**.

Exemple :

- $|a| = \max\{a; -a\}$.
- Le sous-ensemble $[0, 1[$ est borné. 0 est le minimum de l'ensemble, mais par contre, il n'admet pas de plus grand élément.
- L'ensemble $\left\{\frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est borné. Il n'admet aucun minimum et 1 est son maximum.

Théorème : Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Le maximum (*resp.* le minimum), s'il existe, est unique.

Démonstration. Supposons qu'il existe deux plus grands éléments M et M' dans l'ensemble A. Alors par définition, M est supérieur à tous les éléments de A, en particulier $M \geqslant M'$. De même, on a aussi $M' \geqslant M$. Par symétrie, $M = M'$. Le maximum est donc unique. □

C Borne supérieure, borne inférieure

Dans les exemples de la partie précédente, on a vu que $[0, 1[$ n'admet pas de maximum. Pour autant, on sent bien que 1 joue un rôle particulier pour cette partie, tout comme 0 est particulier vis-à-vis de la partie $\left\{\frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Exemple :

- Représenter l'ensemble des majorants (*resp.* l'ensemble des minorants) de l'intervalle $[0, 1[$ en prenant bien soin d'indiquer si les bornes sont incluses ou non dans ces ensembles.
- Représenter l'ensemble des majorants (*resp.* l'ensemble des minorants) de l'ensemble $\left\{\frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ en prenant bien soin d'indiquer si les bornes sont incluses ou non dans ces ensembles.
- Les ensembles des majorants (*resp.* des minorants) ainsi tracés admettent-ils un plus petit élément (*resp.* un plus grand élément) ?

Définition : Soit A un sous-ensemble majoré (*resp.* minoré) de $\mathbb{R}$.
Si l'ensemble des majorants (*resp.* des minorants) de A admet un plus petit élément B (*resp.* un plus grand élément b), alors cet élément est appelé la **borne supérieure** (*resp.* la **borne inférieure**) de l'ensemble A, noté $\sup(A)$ (*resp.* $\inf(A)$).

Exemple : Montrer que si une partie A de $\mathbb{R}$ possède un plus grand élément, alors il admet aussi une borne supérieure et que $\max A = \sup A$.

Axiome de la borne supérieure (admis)

Tout sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Caractérisation de la borne supérieure

Si on note α la borne supérieure d'une partie A de $\mathbb{R}$, alors α est le plus petit des majorants de A. Cela veut dire que tout nombre inférieur à α n'est pas un majorant de A. Autrement dit, si on considère un nombre $\beta < \alpha$, il existe $a \in A$ tel que $\beta < a$.
Cette remarque permet de caratériser la borne supérieure d'une partie A de $\mathbb{R}$:

$$\alpha = \sup A \iff \begin{cases} \forall a \in A,\ a \leqslant \alpha \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ \alpha - \varepsilon < a. \end{cases}$$

Et pour la borne inférieure ?

Les notions ci-dessus se traduisent naturellement pour la borne inférieure :
Tout sous-ensemble non vide et minoré de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

$$\beta = \inf A \iff \begin{cases} \forall a \in A,\ \beta \leqslant a \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ a < \beta + \varepsilon. \end{cases}$$

IV Quelques parties particulières de $\mathbb{R}$

A Les intervalles

Un intervalle de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ « sans trou » (en langage mathématique, on dit *connexe*). Suivant que l'intervalle soit majoré ou non, minoré ou non, qu'il admette ou non un plus grand ou un plus petit élément, on distingue 9 types d'intervalles dans R :

$$\begin{array}{ll}
[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\} &]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\
[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\} &]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\} \\
]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\} &]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \\
]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} &]-\infty,+\infty[= \mathbb{R} \\
[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\} &
\end{array}$$

B Les nombres entiers

Entiers naturels et relatifs

L'ensemble $\mathbb{N}$ est minoré, son plus petit élément est 0, mais il n'est pas majoré.
L'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est ni majoré, ni minoré.

Propriété :

- Toute partie non vide majorée (*resp.* minorée) de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand (*resp.* petit) élément.
- Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Remarque : C'est ce dernier résultat qui est à la base de la descente de Fermat.

Partie entière

Soit x un réel, et $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}$. Alors A est non vide et majorée, et admet donc un plus grand élément, que l'on note $\lfloor x \rfloor$, appelé *partie entière* de x : $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier qui vérifie $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

C Les nombres rationnels

Propriété : L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Cela signifie pour tout réel x, on peut trouver un rationnel aussi proche que l'on veut de x :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0,\ \exists r \in \mathbb{Q},\ -\varepsilon < x - r < \varepsilon.$$

Démonstration. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a ($\lfloor . \rfloor$ désigne la partie entière) :

$$10^n x - 1 < \lfloor 10^n x \rfloor < 10^n x + 1$$

$$x - \frac{1}{10^n} < \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} < x + \frac{1}{10^n}$$

$$-\frac{1}{10^n} < \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} - x < \frac{1}{10^n}$$

On choississant n assez grand (afin d'avoir $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$) on a le résultat voulu (si $\varepsilon \geqslant 1$, on prend $n = 1$, sinon on prend $n = 1 - \dfrac{\ln(\varepsilon)}{\ln(10)}$ par exemple). $\square$