Chapitre n° 5 :
Suites récurrentes classiques

I Suites arithmétiques

Définition : Soit r un réel. Une suite arithmétique de raison r est une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie pour tout entier naturel n la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Expression de u_n en fonction de n

Propriété : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, alors l'expression de u_n en fonction de n est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr.$$

Une suite arithmétique est donc définie par sa raison r et son premier terme u_0.

Démonstration. Récurrence ou somme téléscopique. □

Somme des premiers termes

Propriété : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Soit n un entier naturel quelconque. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}.$$

Démonstration.

□

Exemple : Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r, on a

1. quels que soient les entiers naturels k et p, $u_{p+k} = u_p + kr$.
2. quels que soient les entiers naturels n et p, $\sum_{k=p+1}^{p+n} u_k = \frac{u_{p+1} + u_{p+n}}{2} n$.

II Suites géométriques

Définition : Soit q un réel. Une suite géométrique de raison q est une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie pour tout entier naturel n la relation de récurrence

$$u_{n+1} = qu_n.$$

Remarque : Si $q = 0$, alors $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Si $u_0 = 0$, alors $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si l'on n'est pas dans un des deux cas précédents, alors $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (preuve par récurrence ou raisonnement par minimalité).

Expression de u_n en fonction de n

Propriété : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0, alors l'expression de u_n en fonction de n est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n u_0.$$

Une suite géométrique est donc définie par sa raison q et son premier terme u_0.

Démonstration. Récurrence ou produit téléscopique (attention à ne pas quotienter par 0 !). □

Somme des premiers termes

Propriété : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. Soit n un entier naturel quelconque.

- ◇ Si la raison est différente de 1, alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = u_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

- ◇ si la raison vaut 1, alors la suite est constante et

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0.$$

Exemple : Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_0 > 0$ et vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^3$.

1. Montrer (par récurrence) que cette suite est à termes strictement positifs.
2. Montrer que $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
3. En déduire une expression u_n en fonction de n.

III Suites arithmético-géométriques

Définition : Soient a et b deux réels. Une suite arithmético-géométrique associée à a et b est une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie pour tout entier naturel n la relation de récurrence

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque : Si $a = 1$, on retrouve une suite arithmétique et si $b = 0$, c'est une suite géométrique que l'on reconnaît.

Expression de u_n en fonction de n

On considère que l'on n'est pas dans un cas trivial, c'est-à-dire $a \neq 1$ et $b \neq 0$.
Pour trouver l'expression de u_n en fonction de n, on introduit une suite intermédiaire. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \ell.$$

Le réel ℓ va être choisi de manière à simplifier le plus possible l'expression de la suite v. Avec la bonne valeur, v sera une suite géométrique.

On a

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = au_n + b - \ell = a(v_n + \ell) + b - \ell = av_n + (a-1)\ell + b.$$

En choisissant ℓ tel que $(a-1)\ell + b = 0$, *i.e.* $\ell = \frac{b}{1-a}$ (ce qui est possible car $a \neq 1$), on obtient $v_{n+1} = av_n$. La suite v est donc une suite géométrique de raison a.

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = a^n v_0$ et en revenant à la suite u, on trouve $u_n - \ell = a^n(u_0 - \ell)$, d'où $u_n - \frac{b}{1-a} = a^n(u_0 - \frac{b}{1-a})$, et donc $u_n = a^n u_0 + b\frac{1-a^n}{1-a}$.

On a donc exprimé le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

Une telle suite est donc déterminée par les réels a et b et le terme initial u_0.

Remarque : L'équation pour trouver ℓ peut aussi s'écrire

$$a\ell + b = \ell.$$

En notant f la fonction affine définie (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) par $f(x) = ax + b$, l'équation devient $f(\ell) = \ell$. On dit que ℓ est un point fixe de la fonction f.

L'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas à connaître par cœur. Mais la méthode est à savoir absolument. Il faut pouvoir :

- Retrouver la formulation de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec la bonne valeur de ℓ.
- Montrer que cette suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
- Retrouver l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir du terme général d'une suite géométrique.

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n - 4. \end{cases}$$

Déterminons le terme général u_n en fonction de n.

Résolvons l'équation $3\ell - 4 = \ell$. On trouve $\ell = 2$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{cases} 3 \times u_n - 4 = u_{n+1} \\ 3 \times 2 - 4 = 2 \end{cases}$$

En soustrayant ces deux équations, on trouve, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_{n+1} - 2) = 3(u_n - 2)$. On introduit la suite v définie par $v_n = u_n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite v est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme -1.

On en déduit donc que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = -3^n,$$

et par conséquent, en revenant vers la suite u, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + 2 = -3^n + 2.$$

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3. \end{cases}$$

Déterminer le terme général u_n en fonction de n.

IV Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Définition : Soient a et b deux réels. Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants a et b est une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie pour tout entier naturel n la relation de récurrence

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Une telle suite est déterminée par les réels a et b et les termes initiaux u_0 et u_1 (exercice).

Remarque : On se limite au cas $a \neq 0$ et $b \neq 0$ pour que l'étude soit intéressante.

Pour déterminer l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n, on introduit une équation particulière, appelée *équation caractéristique*, associée à la relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$:

$$x^2 = ax + b.$$

De manière classique pour déterminer les solutions de l'équation caractéristique, on calcule le discriminant $\Delta = a^2 + 4b$ et on distingue plusieurs cas.

Premier cas : $\Delta > 0$.

L'équation possède donc deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{a - \sqrt{\Delta}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{a + \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Soient α et β deux réels. En posant pour tout entier n,

$$v_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n,$$

on s'aperçoit que

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= \alpha x_1^{n+2} + \beta x_2^{n+2} \\ &= \alpha\left(ax_1^{n+1} + bx_1^n\right) + \beta\left(ax_2^{n+1} + bx_2^n\right) \\ &= a\left(\alpha x_1^{n+1} + \beta x_2^{n+1}\right) + b\left(\alpha x_1^n + \beta x_2^n\right) \\ &= av_{n+1} + bv_n. \end{aligned}$$

Donc toute *combinaison linéaire* des suites géométriques $(x_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence initiale. L'idée est alors de choisir correctement α et β pour qu'on retrouve les termes initiaux u_0 et u_1 :

$$\begin{cases} v_0 = u_0 \\ v_1 = u_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta = u = 0 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 = u_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = u_0 - \alpha \\ \alpha(x_1 - x_2) = u_1 - u_0 x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \dfrac{u_1 - u_0 x_2}{x_1 - x_2} \\ \beta = \dfrac{u_0 x_1 - u_1}{x_1 - x_2} \end{cases}$$

Au final, on a donc réussi à exprimer le terme général de la suite u en fonction de n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{u_1 - u_0 x_2}{x_1 - x_2} x_1^n + \frac{u_0 x_1 - u_1}{x_1 - x_2} x_2^n.$$

Deuxième cas : $\Delta < 0$.

L'équation possède maintenant deux solutions complexes conjuguées z et $\overline{z}$. Avec le point de vue trigonométrique, on peut écrire $z = \rho e^{i\theta}$ et $\overline{z} = \rho e^{-i\theta}$.
Le raisonnement vu auparavant s'applique aussi ici et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha\rho^n e^{ni\theta} + \beta\rho^n e^{-ni\theta}, \text{ avec } \alpha = \frac{u_1 - u_0\overline{z}}{z - \overline{z}} \text{ et } \beta = \frac{u_0 z - u_1}{z - \overline{z}}.$$

Avec cette écriture, il n'est pas facile de ce rendre compte que la suite u est une suite réelle. Modifions un peu l'écriture pour que cela apparaisse clairement :

$$\begin{aligned}u_n &= \alpha\rho^n e^{ni\theta} + \beta\rho^n e^{-ni\theta}\\ &= \alpha\rho^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right) + \beta\rho^n\left(\cos(n\theta) - i\sin(n\theta)\right)\\ &= \rho^n\left((\alpha+\beta)\cos(n\theta) + i(\alpha-\beta)\sin(n\theta)\right).\end{aligned}$$

Or,

$$\overline{\alpha} = \overline{\frac{u_1 - u_0\overline{z}}{z - \overline{z}}} = \frac{\overline{u_1 - u_0\overline{z}}}{\overline{z - \overline{z}}} = \frac{u_1 - u_0 z}{\overline{z} - z} = \frac{u_0 z - u_1}{z - \overline{z}} = \beta,$$

les coefficients α et β sont donc des complexes conjugués. Par conséquent, $(\alpha+\beta)$ est un réel et $(\alpha-\beta)$ est un imaginaire pur. En définitive, en posant $A = \alpha+\beta$ et $B = i(\alpha-\beta)$, on a l'expression de u_n sous forme réelle :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \rho^n\left(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\right).}$$

À partir de cette expression, on peut directement chercher A et B en utilisant les deux premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Troisième cas : $\Delta = 0$.

Le discriminant étant nul, l'équation caractéristique ne possède qu'un seule solution $r = a/2 \neq 0$. D'après ce qu'on a dit avant, la suite géométrique $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence. Contrairement au cas précédent, on ne connaît qu'une seule suite vérifiant cette relation, ce qui n'est pas assez pour faire varier les paramètres de manière à faire coïncider les deux premiers termes. Étudions alors la suite $(nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout entier n, on a

$$\begin{aligned}(n+2)r^{n+2} &= nr^{n+2} + 2r^{n+2}\\ &= n(ar^n + 1 + br^n) + \frac{2a}{a}r^{n+2}\\ &= nar^{n+1} + nbr^n + a\frac{1}{r}r^{n+2}\\ &= a(n+1)r^{n+1} + bnr^n.\end{aligned}$$

Donc la suite $(nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie elle aussi la relation de récurrence. Comme dans le premier cas, il est aisé de montrer que toute combinaison linéaire $v_n = \alpha r^n + n\beta r^n$, de ces deux suites vérifie elle aussi la relation de récurrence étudiée. Reste alors à choisir correctement les coefficients pour que les termes initiaux coïncident : $v_0 = u_0$ et $v_1 = u_1$. On résout le système correspondant :

$$\begin{cases} v_0 = u_0 \\ v_1 = u_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = u = 0 \\ \alpha r + \beta r = u_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = u_0 \\ \beta = \dfrac{u_1}{r} - u_0 \end{cases}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(u_0 + n\left(\frac{u_1}{r} - u_0\right)\right)r^n.}$$

Récapitulatif

Théorème : Soient a et b deux réels non nuls et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant pour tout entier naturel n la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Le discriminant de l'équation caractéristique $x^2 - ax - b = 0$ est noté Δ.

- Premier cas : $\Delta > 0$. On note x_1 et x_2 les deux racines distinctes du trinôme. Alors il existe un unique couple de réels (α,β) tel que
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n.}$$
- Second cas : $\Delta < 0$. On note $z = \rho e^{i\theta}$ une des deux racines complexes (conjugués) du trinôme. Alors il existe un unique couple de réels (A, B) tel que
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \rho^n\left(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\right).}$$
- Troisième cas : $\Delta = 0$. On note r l'unique solution du trinôme. Alors il existe un unique couple de réels (α, β) tel que
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\alpha + n\beta)r^n.}$$

Dans les trois cas, en pratique, c'est en résolvant un système à l'aide des termes initiaux u_0 et u_1 que l'on détermine précisément les valeurs des deux coefficients.

Encore une fois, toutes les formules rencontrées dans la démonstration de ce théorème ne sont pas à connaître par cœur. Face à une suite récurrente linéaire d'ordre 2, il faut pouvoir :

- Écrire l'équation caractéristique associée (et la résoudre).
- Donner l'expression du terme général de la suite (*i.e.* connaître les formules du théorème) avec les valeurs exactes pour x_1, x_2, ρ, θ ou r.
- Retrouver les deux coefficients (α et β ou A et B) à partir des deux premiers termes de la suite.

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n. \end{cases}$$

Déterminons le terme général u_n en fonction de n.
L'équation caractéristique associée est $0 = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, dont l'unique solution vaut 3. On sait donc que le terme général de la suite u_n est de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\alpha + n\beta)3^n.$$

On résout alors le système donné par les termes initiaux :

$$\begin{cases} 0 = (\alpha + 0 \times \beta)3^0 \\ 1 = (\alpha + 1 \times \beta)3^1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ 3(\alpha+\beta) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{1}{3} \end{cases}$$

En conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{3}n3^n = n3^{n-1}.$$

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_1 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$$

Déterminons le terme général u_n en fonction de n.

L'équation caractéristique associée est $x^2 - 2x + 2 = 0$. Son discriminant vaut -4 et les deux solutions complexes conjuguées sont

$$x_1 = \frac{2-2i}{2} = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \qquad \text{et} \qquad x_2 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

On sait donc que le terme général de la suite u_n est de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{2}^n\left(A\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + B\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Les termes initiaux permettent d'écrire le système

$$\begin{cases} 1 = \sqrt{2}^0\left(A\cos\left(0\frac{\pi}{4}\right) + B\sin\left(0\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ 2 = \sqrt{2}^1\left(A\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + B\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = A \\ 2 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}A + \frac{\sqrt{2}}{2}B\right) \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ A + B = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = 1. \end{cases}$$

En conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{2}^n\left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -5u_{n+1} - 4u_n. \end{cases}$$

Déterminons le terme général u_n en fonction de n.

L'équation caractéristique associée est $x^2 + 5x + 4 = 0$. Son discriminant vaut 9 et les deux solutions réelles distinctes sont

$$x_1 = \frac{-5-3}{2} = -4 \qquad \text{et} \qquad x_2 = -1.$$

On sait donc que le terme général de la suite u_n est de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha(-4)^n + \beta(-1)^n.$$

Les termes initiaux permettent d'écrire le système

$$\begin{cases} 2 = \alpha + \beta \\ 1 = -4\alpha - \beta \end{cases} \iff \begin{cases} 3\alpha = -3 \\ \alpha + \beta = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 3. \end{cases}$$

En conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3(-1)^n - (-4)^n.$$

Exemple : Déterminer le terme général des suites suivantes en fonction de n :

- ◇ $u_0 = 0$, $u_1 = -1$, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
- ◇ $u_0 = 2$, $u_1 = -3$, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + 6u_{n+1} + 9u_n = 0$.
- ◇ $u_0 = -1$, $u_1 = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 2u_n - 4u_{n-1}$.