A PROPOS DU CALCUL DE L'EXPONENTIELLE D'UNE MATRICE.

Richard Leroy

Dans tout ce document, on considèrera des matrices à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), pour lesquelles on donnera des méthodes de calcul de leur exponentielle.

1 En calculant les puissances des matrices

La première méthode pour calculer l'exponentielle d'une matrice A est d'utiliser la définition de l'exponentielle e^A comme somme de la série entière $\sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}$.
Pour cela, on calcule les puissances de A, et on essaye de reconnaître un développement en série entière "bien connu" pour les coefficients.

Exemple : Soit $A = A_t = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.
On a alors (exercice):

$$\begin{cases} A^{2k} = \begin{pmatrix} (-1)^k t^{2k} & \\ & (-1)^k t^{2k} \end{pmatrix} \\ A^{2k+1} = \begin{pmatrix} & -(-1)^k t^{2k+1} \\ (-1)^k t^{2k+1} & \end{pmatrix} \end{cases}$$

si bien que

$$e^A = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k} & -\sum\limits_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1} \\ \sum\limits_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1} & \sum\limits_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

2 A l'aide de la décomposition de Dunford

On suppose que le polynôme caractérisque $\chi_A(X)$ est scindé sur $\mathbb{K}$. On a donc existence et unicité d'une décomposition (de Dunford) $A = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$ (on sait même que D et N sont des polynômes en A). Dans le Méthodix d'algèbre, page 261, on trouve le résultat suivant :

Proposition : Soit $A = D + N$ la décomposition de Dunford de la matrice (triangularisable) A.
Alors la décomposition de Dunford de e^A est :

$$e^A = \underbrace{e^D}_{\delta} + \underbrace{e^D(e^N - I_n)}_{\nu}.$$

Reste à savoir calculer l'exponentielle d'une matrice nilpotente (facile, c'est une somme finie...) et celle d'une matrice diagonalisable. Pour cela, on écrit $A = P^{-1}DP$, et on sait (cf <u>Méthodix</u> p.257) que $e^A = P^{-1}e^D P$. Certes, le calcul de e^D ne pose plus de problème, mais il faut cependant calculer la matrice de passage P et son inverse P^{-1}... Il y a une autre méthode (connue du jury d'agrégation!!), que nous détaillons ici dans la troisième section.

3 A l'aide d'une interpolation de Lagrange

Lors d'une leçon d'agrégation ("Exponentielle de matrices"), le jury a posé la question suivante :

Exercice : Soit A une matrice (par exemple à coefficients dans $\mathbb{C}$). On suppose que A est diagonalisable. Comment calculer e^A simplement?

La réponse vient de l'utilisation de polynôme pour remplacer la série définissant l'exponentielle.

Lemme : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors e^A est un polynôme en A.

Preuve :
Soit $F = Vect\{A^p / p \in \mathbb{N}\}$. F est un sev de $M_n(\mathbb{K})$, qui est un ev de dimension finie, donc F est fermé. Or e^A est la limite d'une série en A, *ie* est la limite de ses sommes partielles, qui sont des polynômes en A, et donc des éléments de F. Puisque F est fermé, $e^A \in F$, ce qui veut exactement dire que e^A est un polynôme en A. ■

Lemme : $\forall P \in Gl_n(\mathbb{K}), \forall M \in M_n(\mathbb{K}), e^{PMP^{-1}} = Pe^M P^{-1}$

Preuve :
Repasser aux sommes partielles, et justifier le passage à la limite. ■

On suppose désormais que A est diagonalisable (sur $\mathbb{C}$).
Soient λ_i , $i = 1, ..., n$, les valeurs propres (complexes, non nécessairement distinctes) de A. Alors :

$$\exists P \in Gl_n(\mathbb{C}), A = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & . & (0) & \\ & & . & \\ & (0) & & . \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} P =: P^{-1}DP$$

Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme tel que $e^A = Q(A)$.
C'est là qu'intervient l'astuce :
soit $L \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\forall i \in \{1, ..., n\}, L(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$ (un tel polynôme existe par interpolation de Lagrange).
On a alors d'une part :

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & . & & \\ & & . & \\ & & & . \\ & & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(\lambda_1) & & & \\ & . & & \\ & & . & \\ & & & . \\ & & & & L(\lambda_n) \end{pmatrix} = L(D) = L(PAP^{-1}) = PL(A)P^{-1}$$

et d'autre part :

$$e^D = e^{PAP^{-1}} = Pe^AP^{-1}$$

d'où finalement :

$$e^A = L(A),$$

ce qu'on voulait démontrer.

Exemple : On reprend l'exemple déjà étudié plus haut.
Soit $A = A_t = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$ où $t \in \mathbb{R}$.
Alors $Spec(A) = \{it, -it\}$ (on considère A comme une matrice de $M_2(\mathbb{C})$).
Soit $L(X) := \frac{\sin t}{t} X + \cos t$.
L vérifie (on l'a construit par interpolation de Lagrange pour ça...):

$$\begin{cases} L(it) = e^{it} \\ L(-it) = e^{-it} \end{cases}$$

On a alors :

$$e^A = L(A) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

Remarque : Et si A n'est pas diagonalisable?
La première solution consiste, si la matrice A est réelle, à regarder si elle n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$ (c'est ce qu'on a fait ci-dessus).
Et sinon?
En fait, en peut faire essentiellement la même chose avec des matrices triangularisables (ce qui est toujours le cas dans $M_n(\mathbb{C})$...). Pour cela, on introduit le polynôme minimal de A :

$$\psi(X) = (X - \lambda_1)^{m_1}...(X - \lambda_s)^{m_s}$$

(λ_i distinctes deux à deux)

Au lieu d'utiliser le polynôme de Lagrange, on utilise le polynôme de Lagrange-Sylvester, défini par les conditions d'interpolation :

$$\left\{ \begin{array}{c} r(\lambda_k) = e^{\lambda_k} \\ r'(\lambda_k) = e^{\lambda_k} \\ ... \\ r^{(m_k-1)}(\lambda_k) = e^{\lambda_k} \end{array} \right.$$

Conclusion : L'intérêt de cette méthode réside dans sa simplicité (on ne calcule pas de matrice de passage et et n'en inverse pas non plus). Il faut quand même pouvoir calculer les valeurs propres de A, mais on ne peut guère y échapper de tout façon! Il faut aussi calculer le polynôme interpolateur de Lagrange, mais on a des formules pour ça... Par contre, dans le cas où la matrice est seulement triangularisable, on doit calculer le polynôme minimal de A, ce qui peut être un peu long.
Mais un autre avantage est de pouvoir généraliser cette méthode pour donner un sens à $\sum_{k \geq 0} a_k A^k$ dès que cette série entière (et éventuellement ses dérivées dans le cas d'une interpolation de Lagrange-Sylvester) est définie sur le spectre de A.
Pour de plus amples détails et des exemples de calculs, voir *Gantmacher*, Théorie des Matrices.