Questions & réponses

Réponses

R672. Posé dans RMS 120-2.
Soit $\mathbb{K}$ un corps (commutatif) quelconque. Caractériser les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour lesquelles il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB - BA = A$.

(Clément de Seguins Pazzis)

Réponse de Richard Leroy

La réponse est donnée dans le théorème 1 ci-après.
Remarque : on peut (et on va) supposer le corps $\mathbb{K}$ algébriquement clos.
Soit en effet $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ une extension de corps. L'équation $AX - XA = A$ admet une solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si elle admet une solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{L})$ car le rang d'un système linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}$ est invariant quand on le considère dans $\mathbb{L}$.
Notons $\mathcal{N}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB - BA = A\}$.
Quand il n'y a pas de risque de confusion, on notera simplement $\mathcal{N}$ au lieu de $\mathcal{N}_n$. L'ensemble $\mathcal{N}$ a les propriétés suivantes :

Lemme 1 *(i) $\mathcal{N}$ est stable par conjugaison.*

(ii) Soit $M \in \mathcal{N}$ une matrice diagonale par blocs. Alors M appartient à $\mathcal{N}$ si et seulement si chaque bloc appartient à $\mathcal{N}$.

(iii) Soit p la caractéristique de $\mathbb{K}$. Si p ne divise pas n, alors $\mathcal{N}$ ne contient aucune matrice inversible.

Démonstration.

(i) Si $M = PCP^{-1} \in \mathcal{N}$, alors $MN - NM = M$ pour une certaine matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et alors $C(PNP^{-1}) - (PNP^{-1})C = C$, donc $C \in \mathcal{N}$.

(ii) Calcul par blocs facile.

(iii) Si $M \in \mathcal{N} \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $MN - NM = M$ pour une certaine matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, d'où $N = M^{-1}NM + I = M^{-1}(N + I)M$. En particulier, $\operatorname{tr} N = n + \operatorname{tr} N$, et donc $p \mid n$. $\square$

On en vient maintenant à la réponse à la question initiale.

Théorème 1 *Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique p, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il y a équivalence entre :*

(i) $A \in \mathcal{N}$

(ii) les blocs de la décomposition de Jordan de A *sont soit nilpotents, soit de taille un multiple de* p*.*

En particulier, si $p = 0$*,* $\mathcal{N}$ *est l'ensemble des matrices nilpotentes de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*.*

Démonstration.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Soit $A \in \mathcal{N}$. On considère la décomposition de Jordan de A.

Soit $J_{n_i}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$ l'un des blocs de cette décomposition, de taille n_i.

D'après le lemme précédent, $J_{n_i}(\lambda_i) \in \mathcal{N}$. De plus, sauf peut-être si $p \mid n_i$, $J_{n_i}(\lambda_i)$ n'est pas inversible, donc $\lambda_i = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) D'après le lemme 1, il suffit de montrer que les blocs de Jordan nilpotents et ceux de taille n_i divisible par p appartiennent à $\mathcal{N}$. Cela découle de l'identité suivante, valable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}[X])$:

$$J_{n_i}(X)B_{n_i}(X) - B_{n_i}(X)J_{n_i}(X) = \begin{pmatrix} X & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & X & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & (1-n_i)X \end{pmatrix},$$

où

$$J_{n_i}(X) = \begin{pmatrix} X & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & X & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & X \end{pmatrix}$$

et

$$B_{n_i}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ X & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 2X & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n_i - 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (n_i-1)X & n_i \end{pmatrix}.$$

En effet, les deux types de blocs de Jordan annoncés dans le théorème correspondent aux cas $X = 0$ ou $p \mid n_i$, pour lesquels on a bien $J_{n_i}(X)B_{n_i}(X) - B_{n_i}(X)J_{n_i}(X) = J_{n_i}(X)$. $\square$