Stage Maple Agrégation

Ker Lann, les 7 et 8 septembre 2006
Richard Leroy

• Dichotomie et méthode de Newton

La méthode de Newton permet de calculer une valeur approchée d'une solution de $f(x) = 0$.

Elle consiste à calculer, étant donné x_0, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la formule de récurrence suivante :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Il faut bien sûr que la dérivée ne s'annule pas, et bien choisir le point initial x_0, qui doit être suffisamment proche de la racine recherchée. Pour cela, on peut procéder par dichotomie :

Exercice 1

Ecrire une procédure `dicho` qui en entrée prend une fonction f, deux nombres réels a et b, et un entier N, et qui effectue N dichotomies de l'intervalle $[a, b]$ pour approcher une racine de f.

Que fait la commande `realroot` de `Maple` ?

Exercice 2

Ecrire une procédure `Newton` qui prend en entrée une fonction f, un réel x_0 et un réel positif ε, et qui met en oeuvre la méthode de Newton pour trouver une solution approchée de $f(x) = 0$. On s'arrêtera au plus petit entier n tel que $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$. On prévoira un test d'arrêt sur le nombre maximum d'itérations.

Ecrire une procédure `newtongraph` qui illustre graphiquement la méthode de Newton.

• Schéma de Horner

La méthode de Horner permet d'évaluer un polynôme P en un point x plus efficacement qu'une évaluation naïve. Cette méthode est basée sur l'écriture d'un polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ sous la forme suivante :

$$P(X) = X(X(X(\dots X(a_d X + a_{d-1})\dots) + a_2) + a_1) + a_0)$$

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$

En déduire une procédure `horner` qui évalue un polynôme P en un point x. Combien de multiplications nécessite-t-elle ? Comparer avec une évaluation naïve. On pourra utiliser la commande `time()` de `Maple` pour illustrer ce résultat.

• **Règle de Descartes**

La règle de Descartes ramène l'étude du nombre de racines strictement positives d'une polynôme à coefficients réels à l'évaluation d'une fonction simple : le nombre de changements de signe dans la suite des coefficients du polynôme. Plus précisément :

Définition :

Le nombre de changements de signes $V(\underline{a})$ d'une suite finie $\underline{a} \in (\mathbb{R}^*)^k$ est défini par induction sur $k \in \mathbb{N}^*$ par :

$$V(a_1) = 0$$
$$V(a_1, ..., a_k) = \begin{cases} V(a_1, ..., a_{k-1}) + 1 \text{ si } sign(a_{k-1}a_k) = -1 \\ V(a_1, ..., a_{k-1}) \text{ sinon} \end{cases}$$

Cette définition s'étend à une suite finie $\underline{a}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ en considérant la suite finie $\underline{b}$ obtenue en supprimant les zéros de $\underline{a}$ et en définissant alors $V(\underline{a}) = V(\underline{b})$.

On a alors le résultat suivant :

Théorème:

Le nombre $\mu(P)$ de racines strictement positives (comptées avec leur ordre de multiplicité) d'un polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{R}[X]$ est majoré par $V(a_0, ..., a_d)$.

De plus, la différence $V(a_0, ..., a_d) - \mu(P)$ est paire.

Si le polynôme P a toutes ses racines réelles, alors on a égalité $\mu(P) = V(a_0, ..., a_d)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$

Implémenter la régle de Descartes.

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$

Ecrire une procédure `dp` qui prend en entrée une matrice symétrique réelle M, et qui permet de savoir si M est définie positive, *i.e.* si les valeurs propres de M sont toutes strictement positives.

On pourra utiliser la commande `charpoly` de `Maple`.