Préparation à l'agrégation de Mathématiques 2009 ENS Cachan Ker Lann
Epreuve de modélisation, option C : algèbre et calcul formel

richard.leroy@univ-rennes1.fr
http://perso.univ-rennes1.fr/richard.leroy/

Graphe'n Chomp

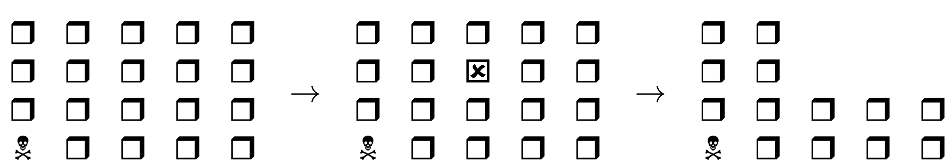
Résumé : On présente dans ce texte le jeu du Chomp, dont on donne une stratégie gagnante de manière algorithmique.

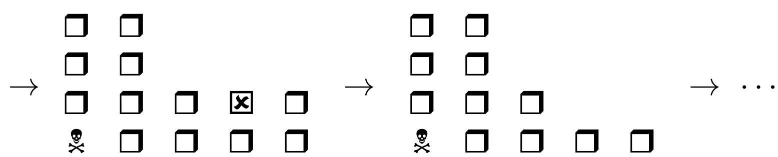
Mots-clés : Théorie des jeux, graphe, noyau.

Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury demande que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.

1 Introduction

Le jeu de Chomp se joue à deux joueurs et une tablette de chocolat, dont le carré en bas à gauche est empoisonné. Les joueurs choisissent à tour de rôle des carrés de chocolat. Lors de son tour, un joueur choisit un des carrés restants, qu'il mange ainsi que tous les carrés situés au-dessus et à droite de celui-ci :





Le perdant est le joueur qui mange le carré empoisonné.

On représente le jeu par un rectangle à m lignes et n colonnes ($m, n \geq 1$). On suppose par la suite que $m \leq n$.

Il est aisé de démontrer que le joueur 1 a une stratégie gagnante :

Théorème : *Il existe un mouvement gagnant pour le premier joueur.*

Preuve : *On considère le cas où $mn > 1$.*
Considérons le mouvement consistant à choisir le carré en haut à droite. Si ce mouvement n'est pas gagnant pour le joueur 1, alors le joueur 2 a un mouvement gagnant. Mais tout mouvement choisi par le joueur 2 peut être jouée par le joueur 1 au premier tour. Le joueur 1 a donc un mouvement gagnant. ✔

Une telle preuve est appelée vol de stratégie. Il s'agit d'une preuve non constructive. Pour les cas faciles ($m = 1$, $m = 2$, $m = n$), trouver une stratégie gagnante est aisé. L'objet de ce texte est l'obtention d'une stratégie gagnante pour le joueur 1 dans le cas général.

2 Un peu de théorie des graphes

Un graphe fini orienté est un constitué d'un ensemble fini S de sommets et d'un ensemble fini d'arcs orientés (flèches) entre ces sommets.

Pour le jeu de Chomp, les sommets sont les différents états du jeu (i.e. les états de la barre de chocolat au cours du jeu, c.f. la figure ci-dessus).

Soient a et b deux états du jeu. L'arc $a \to b$ symbolise la possibilité, pour un joueur, de passer en jouant un seul coup de l'état a à l'état b. On dit que l'état b est un successeur de l'état a, et que a est un prédécesseur de b.

Un état particulier est l'état vide, noté $\emptyset$, obtenu quand le perdant mange le carré empoisonné.

Le graphe obtenu en déterminant tous les sommets et tous les arcs du jeude Chomp est particulier ; il possède quelques propriétés :

1. *C'est un 1-graphe :*

   Il y a au plus un arc d'un sommet vers un autre.

2. *Il est antiréflexif :*

   Il n'y a aucune boucle $a \to a$.

3. *Il est antisymétrique :*

   S'il existe un arc $a \to b$, alors il n'y a pas d'arc $b \to a$.

4. *Il n'y a aucun circuit :*

   En partant d'un sommet a, le jeu ne reviendra jamais en a.

5. *Il existe au moins un sommet sans successeur.*

On introduit maintenant les définitions suivantes :

Définition : *Un sous-ensemble A de sommets est dit* **stable** *si tout sommet a de A n'a aucun successeur dans A.*

Un sous-ensemble A de sommets est dit **absorbant** *si tout sommet b n'appartenant pas à A possède au moins un successeur dans A.*

Un sous-ensemble A de sommets est appelé **noyau** *du graphe s'il est à la fois stable et absorbant.*

Exemples :

➤

$$\begin{array}{ccccccc} & & a & & & & \\ & \swarrow & & \searrow & & & \\ b & & & & c & & \\ & & & \swarrow & & \searrow & \\ & & d & & & & e \end{array}$$

Noyau : $\{b, d, e\}$

➢ $$\begin{array}{ccccc} & & a & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ d & & & & b \\ & \nwarrow & & \swarrow & \\ & & c & & \end{array}$$ ***Noyaux :*** $\{a, c\}, \ \{b, d\}$

➢ $$\begin{array}{ccccc} & & a & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ c & & \longleftarrow & & b \end{array}$$ ***Pas de noyau***

Un graphe ne possède pas forcément de noyau, et même s'il existe, celui-ci n'est pas unique. Cependant, dans le cas du jeu de Chomp, on a le résultat suivant :

Théorème : *Tout graphe fini orienté sans circuit possède un unique noyau.*

Preuve : *D'une part, un tel graphe possède au moins un sommet sans successeur et d'autre part, un tel sommet appartient à tout éventuel noyau. On procède alors par récurrence sur le nombre n de sommets (indication : on pourra choisir un sommet sans successeur, et considérer le graphe privé de ce sommet et de l'ensemble de ses prédécesseurs).* ✓

3 Obtention de la stratégie gagnante

Le graphe du jeu de Chomp possède donc un unique noyau. Supposons que le joueur 1 le connaisse. Il peut alors jouer de façon à toujours rester dans le noyau. Le jeu prend fin quand il atteint l'état vide $\emptyset$, obtenu juste après l'empoisonnement du joueur 2.

Le noyau d'un graphe est souvent difficile à calculer. Dans les cas où la dimension du jeu de Chomp n'est pas trop grande, on peut toutefois le calculer récursivement.

4 Suggestions pour le développement

Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécesairement dans l'ordre, et de façon plus fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées. Il est demandé que vos investigations comportent une partie ordinateur.

➢ *Plusieurs points du texte sont affirmés sans démonstration. Le candidat est invité à les expliciter.*

➢ *En ce qui concerne le passage sur machine, le candidat est invité à programmer la recherche du noyau du graphe du jeu de Chomp, ainsi que l'obtention de la stratégie gagnante. On pourra coder les différents états par des n-uplets de nombres compris entre 1 et m, représentant le nombre de carrés restant sur chaque ligne. Le candidat pourra utiliser avec profit l'option* `remember` *de Maple.*

➢ *L'utilisation de matrices pour représenter les différents états pourra rendre l'exposé sur machine plus compréhensible.*

➢ *Le candidat pourra proposer une partie contre le jury.*