Le programme portera sur les chapitres **Espaces vectoriels** et **Applications linéaires**.

Questions de cours :

La colle commencera par une question de cours. Au choix de l'examineur :

- Définition d'une famille libre / liée / génératrice / base / dimension.
- Définition / caractérisation d'un sous-espace vectoriel (sans la preuve).
- Définition d'une combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \dots, u_p$ d'un espace vectoriel E + définition de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.
- Connaître les manipulations possibles sur une famille génératrice sans perdre cette propriété.
- Définition d'une application linéaire.
- Définition du noyau / de l'image d'une application linéaire et lien avec l'injectivité / la surjectivité (énoncés seulement)

Thèmes des exercices :

- Espaces vectoriels : quelques compétences à avoir :
 - Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel → deux méthodes :
 - Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence
 - Montrer qu'il s'agit de l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs, et donc d'un espace vectoriel engendré par cette famille de vecteurs.
 - Montrer qu'une famille de vecteurs est libre / liée / génératrice.
 - Étudier l'appartenance d'un vecteur à l'espace vectoriel engendré par d'autres vecteurs.
 - Déterminer une base et la dimension d'un espace vectoriel.
 - Savoir qu'une famille $(u_1, \dots, u_p)$ est toujours génératrice de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ par définition
 - Si elle n'est pas libre, savoir en extraire une base (manipulation des familles génératrices).
 - Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée.
- Applications linéaires : quelques compétences à avoir :
 - Montrer qu'une application est linéaire → deux méthodes :
 - revenir à la définition
 - si les espaces de départ et d'arrivée sont $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: calculer la matrice associée.
 - Calculer le noyau d'une application linéaire, faire le lien avec l'injectivité éventuelle.
 - Calculer l'image d'une application linéaire, faire le lien avec la surjectivité éventuelle.
 - Savoir déterminer entièrement une application linéaire en ne connaissant que les images de la base canonique.

Remarque : les élèves doivent avant tout savoir travailler avec les bases canoniques des différents espaces de référence. Les exercices faisant intervenir une autre base seront guidés (et considérés comme difficiles).

SEMAINE

30

Programme de colle

(du 23 au 27 mai)

Le programme portera sur le chapitre **Espaces vectoriels**.

Questions de cours :

La colle commencera par une question de cours. Au choix de l'examineur :

- Définition d'une famille libre / liée / génératrice / base / dimension.
- Définition / caractérisation d'un sous-espace vectoriel (sans la preuve).
- Définition d'une combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \dots, u_p$ d'un espace vectoriel E + définition de Vect $(u_1, \dots, u_p)$.
- Connaître les manipulations possibles sur une famille génératrice sans perdre cette propriété.

Thèmes des exercices :

- Espaces vectoriels : quelques compétences à avoir :
 - Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel → deux méthodes :
 - Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence
 - Montrer qu'il s'agit de l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs, et donc d'un espace vectoriel engendré par cette famille de vecteurs.
 - Montrer qu'une famille de vecteurs est libre / liée / génératrice.
 - Étudier l'appartenance d'un vecteur à l'espace vectoriel engendré par d'autres vecteurs.
 - Déterminer une base et la dimension d'un espace vectoriel.
 - Savoir qu'une famille $(u_1, \dots, u_p)$ est toujours génératrice de Vect $(u_1, \dots, u_p)$ par définition
 - Si elle n'est pas libre, savoir en extraire une base (manipulation des familles génératrices).
 - Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée.

Le programme portera sur les chapitres **Loi usuelles discrètes** et **Espaces vectoriels**.

Questions de cours :

La colle commencera par une question de cours. Au choix de l'examinateur :

- Calcul de l'espérance et de la variance d'une loi uniforme sur $[[1, n]]$.
- Calcul de l'espérance et de la variance d'une loi de Bernoulli
- Calcul de l'espérance d'une loi géométrique
- Calcul de l'espérance d'une loi de Poisson
- Définition d'une famille libre / liée / génératrice / base / dimension.

Thèmes des exercices :

- Lois usuelles discrètes : les élèves se rapporteront aux cas typiques vus en classe pour reconnaître les lois usuelles en jeu dans les exercices. Ils doivent connaître par cœur les résultats suivants :

Lois	Valeurs prises	Probabilités	Espérance	Variance
Uniforme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$	$[[1, n]]$	$P(X = k) = \frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$	$\{0, 1\}$	$P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$	p	$p(1 - p)$
Binomiale $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$	$[[0, n]]$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	np	$np(1 - p)$
Hypergéométrique $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$	À retrouver pour chaque exercice!		np	
Géométrique $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ

- Espaces vectoriels :
 - Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel → deux méthodes :
 - Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence
 - Montrer qu'il s'agit de l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs, et donc d'un espace vectoriel engendré par cette famille de vecteurs.
 - Montrer qu'une famille de vecteurs est libre / liée / génératrice.
 - Étudier l'appartenance d'un vecteur à l'espace vectoriel engendré par d'autres vecteurs.
 - Déterminer une base et la dimension d'un espace vectoriel.
 - Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée.

Le programme portera sur les chapitres **Fonctions de deux variables** et **Lois usuelles discrètes**.

Questions de cours :

La colle commencera par une question de cours. Au choix de l'examinateur :

- Calcul de l'espérance et de la variance d'une loi uniforme sur $[[1, n]]$.
- Calcul de l'espérance et de la variance d'une loi de Bernoulli
- Calcul de l'espérance d'une loi géométrique
- Calcul de l'espérance d'une loi de Poisson

Thèmes des exercices :

- Représentation graphique de domaines de $\mathbb{R}^2$.
- Fonctions de deux variables : domaine de définition, lignes de niveau, dérivées partielles d'ordre 1 et 2, points critiques, recherche d'extrema locaux (points critiques et conditions d'ordre 2), extrema liés (les exercices portant sur ce point précis seront faciles), recherche d'extrema globaux (aucun théorème n'a été vu en cours).
- Lois usuelles discrètes : les élèves se rapporteront aux cas typiques vus en classe pour reconnaître les lois usuelles en jeu dans les exercices. Ils doivent connaître par cœur les résultats suivants :

Lois	Valeurs prises	Probabilités	Espérance	Variance
Uniforme $X \hookrightarrow \mathcal{U} ([[1, n]])$	$[[1, n]]$	$P(X = k) = \frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$	$\{0, 1\}$	$P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$	p	$p(1 - p)$
Binomiale $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$	$[[0, n]]$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	np	$np(1 - p)$
Hypergéométrique $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$	À retrouver pour chaque exercice!		np	
Géométrique $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ

SEMAINE

27

Programme de colle

(du 18 au 22 avril)

Le programme portera sur les chapitres **Intégration sur un segment** et **Fonctions de deux variables**.

Questions de cours :

La colle commencera par une question de cours. Au choix de l'examineur :

- Définition d'un point critique et énoncé du théorème liant points critiques et extrema locaux
- Énoncé des conditions d'ordre 2 pour la recherche d'extremum local (notations de Monge r, s, t)
- Énoncé du théorème des extrema liés

Thèmes des exercices :

- Intégration sur un segment. 3 méthodes : cas où une primitive est connue, intégration par parties, changement de variables.
- Sommes de Riemann.
- Représentation graphique de domaines de $\mathbb{R}^2$.
- Fonctions de deux variables : domaine de définition, lignes de niveau, dérivées partielles d'ordre 1 et 2, points critiques, recherche d'extrema locaux (points critiques et conditions d'ordre 2), extrema liés (les exercices portant sur ce point précis seront faciles), recherche d'extrema globaux (aucun théorème n'a été vu en cours).

SEMAINE

26

Programme de colle

(du 11 au 15 avril)

Le programme portera sur les chapitres **Intégration sur un segment** et **Fonctions de deux variables**.

Questions de cours :

La colle commencera par une question de cours. Au choix de l'examineur :

- Intégration par parties (énoncé) + application au calcul d'une primitive de $x \mapsto \ln x$ sur $]0, +\infty[$.
- Changement de variables (énoncé) + application : l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle $[a, b]$ est nulle.
- Formule pour les sommes de Riemann + application : étude de la convergence de $u_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e^{k/n}$.

Thèmes des exercices :

- Intégration sur un segment. 3 méthodes : cas où une primitive est connue, intégration par parties, changement de variables.
- Sommes de Riemann.
- Représentation graphique de domaines de $\mathbb{R}^2$.
- Fonctions de deux variables : domaine de définition, lignes de niveau, dérivées partielles d'ordre 1 et 2, points critiques (exercices calculatoires).

Les exercices portant sur la recherche d'extrema seront au programme de la semaine 27.

Le programme portera sur le chapitre **Intégration sur un segment**.

Questions de cours :

La colle commencera par une question de cours. Au choix de l'examineur :

- Intégration par parties (énoncé) + application au calcul d'une primitive de $x \mapsto \ln x$ sur $]0, +\infty[$.
- Changement de variables (énoncé) + application : l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle $[-a, a]$ (avec $a > 0$) est nulle.
- Formule pour les sommes de Riemann + application : étude de la convergence de $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{k/n}$.

Thèmes des exercices :

- Intégration sur un segment. 3 méthodes : cas où une primitive est connue, intégration par parties, changement de variables.
- Sommes de Riemann.

Rappel : les élèves doivent connaître **par cœur** le formulaire de primitives de référence suivant :

$f(x)$	$F(x)$	Domaine de validité I
$u' u^n$ ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$)	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + C$	$I \subset D_u$ et, si $n < 0$, u ne s'annule pas sur I
$u' u^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	u strictement positive sur I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$	u strictement positive sur I
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + C$	u ne s'annule pas sur I
$u' e^u$	$e^u + C$	$I \subset D_u$

Le programme portera sur les chapitres **Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$** et **Intégration sur un segment**.

Questions de cours :

La colle commencera par une question de cours. Au choix de l'examineur :

- Preuve du résultat suivant : Soit I un intervalle stable par f et contenant u_0 . Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in I$.
- Preuve du résultat suivant : Soit f une fonction continue sur I et $[a, b] \subset I$ un intervalle stable par f . Alors f possède un point fixe dans $[a, b]$.
- Intégration par parties (énoncé) + application au calcul d'une primitive de $x \mapsto \ln x$ sur $]0, +\infty[$.
- Énoncé et preuve : Changement de variables

Thèmes des exercices :

- Étude de suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$. On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis pour les exercices plus difficiles.
- Calcul de primitives. **Attention : seule la méthode directe est exigible cette semaine** : pas d'intégration par parties, pas de changement de variables.

Les élèves doivent cependant connaître **par coeur** le formulaire de primitives de référence suivant :

$f(x)$	$F(x)$	Domaine de validité I
$u' u^n$ ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$)	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + C$	$I \subset D_u$ et, si $n < 0$, u ne s'annule pas sur I
$u' u^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	u strictement positive sur I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$	u strictement positive sur I
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + C$	u ne s'annule pas sur I
$u' e^u$	$e^u + C$	$I \subset D_u$

SEMAINE

23

Programme de colle

(du 21 au 25 mars)

Le programme portera sur les chapitres **Applications** et **Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$** .

Questions de cours envisageables :

- théorème de la bijection
- Soit I un intervalle stable par f et contenant u_0 . Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in I$.
- Soit f une fonction continue sur I et $[a, b] \subset I$ un intervalle stable par f . Alors f possède un point fixe dans $[a, b]$.

Thèmes des exercices (liste non exhaustive) :

- théorème de la bijection
- dérivabilité de la bijection réciproque
- suites implicites
- étude de suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$. On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis pour les exercices plus difficiles.

SEMAINE

22

Programme de colle

(du 14 au 18 mars)

Le programme portera uniquement sur le chapitre **Applications**.

Questions de cours envisageables :

- définition d'une injection + exemple
- définition d'une surjection + exemple
- définition d'une bijection + exemple
- théorème de la bijection

Thèmes des exercices (liste non exhaustive) :

- théorème de la bijection
- dérivabilité de la bijection réciproque
- suites implicites